1. Sia S la riflessione rispetto al piano $\pi \subset \mathbf{R}^3$ di equazione $x + y = 0$.
   (a) Trovare le formule che descrivono la trasformazione S.
   (b) Determinare i punti fissi di S.
   (c) Determinare i punti $P \in \mathbf{R}^3$ per cui $S(P) = -P$.
   (d) Determinare l'immagine $S(m)$ della retta m data da $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $(t \in \mathbf{R})$.

2. Sia $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ la trasformazione data da
$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}z \\ -y \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}z \end{pmatrix}.$$
   (a) Determinare autovalori reali e corrispondenti autospazi di f.
   (b) Scrivere f come composizione di una riflessione rispetto ad un piano e una rotazione rispetto ad una retta.

3. Sia l la retta di equazione parametrica $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbf{R})$. Sia R la rotazione intorno ad l di un angolo di 90^o.
   (a) Trovare le formule che descrivono la trasformazione R.
   (b) Calcolare l'immagine $S(\pi)$ del piano π di equazione $x + y + z = 1$.
   (c) Stesse domande per la retta l di equazione parametrica $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbf{R})$.

4. Siano $a, b, c \in \mathbf{R}$ non tutti nulli e sia $d = a^2 + b^2 + c^2$. Sia $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ la trasformazione data da
$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{d} \begin{pmatrix} a^2 - b^2 - c^2 & 2ab & 2ac \\ 2ab & -a^2 + b^2 - c^2 & 2bc \\ 2ac & 2bc & -a^2 - b^2 + c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$
   (a) Far vedere che la traccia della matrice è uguale a -1.
   (b) Determinare la dimensione dello sottospazio $\{\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3 : f(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}\}$.
   (c) Geometricamente, cosa fa f?

5. (a) Dimostrare che la composizione di due rotazioni intorno a delle rette distinte in $\mathbf{R}^3$ è ancora una rotazione.
   (b) Dimostrare che la composizione di due riflessioni rispetto a due piani distinti in $\mathbf{R}^3$ è una rotazione intorno ad una retta. Geometricamente, che rapporto c'è fra i due piani e la retta?

6. Dire di che tipo di quadrica in $\mathbf{R}^3$ si tratta:
   (a) $X^2 + Y + Z = 0$;
   (b) $X^2 + Y + Z = 1$;
   (c) $X^2 + Y^2 + Z = 0$;
   (d) $X^2 + Y^2 + Z^2 - X - Y - Z = 0$;
   (e) $X^2 + XY - Y^2 - X - 2Y = 0$;
   (f) $XY + YZ + ZX = 1$;
   (g) $XY + YZ + ZX = 0$;
   (h) $XY + YZ + ZX = -1$.