

1. Disegnare le seguenti coniche:

- (a) $XY - 2X = 0$;
- (b) $X^2 + XY + Y^2 + X + Y + 1 = 0$;
- (c) $X^2 + 4XY + 4Y^2 - 2X - 4Y + 2 = 0$;
- (d) $X^2 + 2XY + Y^2 - 2X + 2Y + 1 = 0$;
- (e) $3X^2 - 8XY - 3Y^2 + 10 = 0$;
- (f) $2X^2 - 3XY - 2Y^2 - X + 2Y = 0$;
- (g) $3X^2 + 2XY + 3Y^2 + 2\sqrt{2}X - 2\sqrt{2}Y = 0$;
- (h) $5X^2 + 4XY + 2Y^2 - 4X - 4Y + 2 = 0$.

2. “Diagonalizzare” le seguenti forme quadratiche. In altre parole, trovare una matrice ortogonale U tale che il cambiamento di variabili

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix}$$

porti la forma quadratica nella forma $\lambda_1 X'^2 + \lambda_2 Y'^2 + \lambda_3 Z'^2$.

- (a) $X^2 + YZ$;
- (b) $X^2 + Y^2 + 2YZ + Z^2$;
- (c) $XY + YZ - XZ$;
- (d) $4X^2 - 12XZ - 2Y^2 + 12YZ - 9Z^2$;
- (e) $5X^2 + 11Y^2 + 2Z^2 + 16XY - 20YZ + 4XZ$.

3. Sia V uno spazio vettoriale reale con prodotto scalare. Sia $f : V \longrightarrow V$ un'applicazione lineare che soddisfa

$$\langle f(\mathbf{y}), \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{y}, f(\mathbf{x}) \rangle, \quad \text{for all } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V.$$

- (a) Sia A la matrice rappresentativa di f rispetto ad una base ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ di V . Dimostrare che A è simmetrica.
- (b) Sia $\mathbf{v} \in V$ un autovettore di f di autovalore $\lambda \in \mathbf{R}$. Sia $\mathbf{v}^\perp = \{\mathbf{x} \in V : \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle = 0\}$ il complemento ortogonale dello span di $\mathbf{v}$. Dimostrare che f “preserva” $\mathbf{v}^\perp$. In altre parole, dimostrare che $f(\mathbf{x}) \in \mathbf{v}^\perp$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbf{v}^\perp$.

4. Sia C la conica di equazione $x^2 - y^2 = 4$.

- (a) Disegnare C .
- (b) Disegnare la traslata di C di passo $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
- (c) Ruotare C intorno all'origine con angolo 45° . Disegnare il risultato C' .
- (d) Ruotare C intorno al punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ con angolo 90° . Disegnare il risultato C'' .

5. Sia H l'iperbole di equazione $X^2 - 7Y^2 = 1$. Dati due punti $P = (x, y)$ e $P' = (x', y')$ di H definiamo il “prodotto” $P * P' = (x'x + 7y'y, x'y + y'x)$.

- (a) Disegnare H .
- (b) Dimostrare: se P, P' appartengono ad H , anche $P * P'$ appartiene ad H .
- (c) Sia $E = (1, 0)$. Dimostrare che $P * E = E * P = P$ per ogni punto $P \in H$.
- (d) Sia $P = (x, y)$ un punto di H . Far vedere che il punto $P' = (x, -y)$ ha la proprietà che $P * P' = P' * P = E$.
- (e) Far vedere che il punto $P = (8, 3)$ appartiene ad H . Trovare altri tre punti sull'iperbole H con coordinate intere.