1. Sia $T_{\mathbf{w}}$ la traslazione di passo $\mathbf{w}$. Sia $\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e sia $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Determinare $\mathbf{v}_2 = T_{\mathbf{v}_1}(\mathbf{v}_0)$.
   (b) Determinare $\mathbf{v}_3 = T_{\mathbf{v}_2}(\mathbf{v}_1)$.
   (c) Determinare $\mathbf{v}_4 = T_{\mathbf{v}_3}(\mathbf{v}_2)$.
   (d) ... ecc. Determinare $\mathbf{v}_{10}$.

2. Sia $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ e sia R la rotazione intorno a P in senso antiorario di un angolo di 90^o.
   (a) Trovare le formule che desrcivono la trasformazione R e calcolare $R(Q)$ dove $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   (b) Determinare l'immagine $R(l)$ della retta l di equazione $x = y$.

3. Sia m la retta di equazione $y = 3x - 1$ e sia S la riflessione rispetto ad m.
   (a) Trovare le formule per la trasformazione S e calcolare $S(Q)$ dove $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   (b) Calcolare $S^2(Q) = S(S(Q))$. Calcolare $S^3(Q) = S(S(S(Q)))$. Calcolare $S^{80}(Q)$.

4. Sia S_1 la riflessione rispetto alla retta di equazione $x = y$ e sia S_2 la riflessione rispetto alla retta di equazione $x = 1$.
   (a) Trovare le formula per S_1, per S_2 e per le composizioni $S_1 \circ S_2$ e $S_2 \circ S_1$.
   (b) Geometricamente, cosa fanno le trasformazioni $S_1 \circ S_2$ e $S_2 \circ S_1$?

5. Sia S_1 la riflessione rispetto alla retta di equazione $x = y$ e sia R la rotazione intorno all'origine in senso antiorario di angolo di 90^o
   (a) Trovare le formule per R e per le composizioni $S_1 \circ R$ e $R \circ S_1$.
   (b) Geometricamente, cosa fanno le trasformazioni $S_1 \circ R$ e $R \circ S_1$?

6. Sia R la rotazione intorno all'origine in senso antiorario di angolo di 90^o e sia R_1 la rotazione intorno al punto $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ in senso antiorario di angolo di 90^o .
   (a) Trovare le formule per le composizioni $R \circ R_1$ e $R_1 \circ R$.
   (b) Geometricamente, cosa fanno le trasformazioni $R \circ R_1$ e $R_1 \circ R$?

7. (a) Verificare che i seguenti vettori formano una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$.
$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$
   (b) Siano $a, b, c \in \mathbf{R}$ non tutti nulli e sia $d = a^2 + b^2 + c^2$. Dimostrare che i seguenti vettori formano una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$. (Per $a = b = c = 1$ si trovano i vettori della parte (a)).
$$\frac{1}{d}\begin{pmatrix} a^2 - b^2 - c^2 \\ 2ab \\ 2ac \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{d}\begin{pmatrix} 2ab \\ -a^2 + b^2 - c^2 \\ 2bc \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{d}\begin{pmatrix} 2ac \\ 2bc \\ -a^2 - b^2 + c^2 \end{pmatrix}.$$

8. Sia π il sottospazio in $\mathbf{R}^3$ di equazione $x + 2y - z = 0$.
   (a) Esibire una base ortonormale di π.
   (b) Esibire una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ che contiene la base determinata nella parte (a).