Geometria 2. 2^o Esonero. 19 Febbraio 2004, 11:00–13:00.

COGNOME .... *NOME* ....

Inserire le risposte negli spazi predisposti, *accompagnandole con spiegazioni* chiare ed essenziali. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Ogni esercizio vale 7.5 punti.

1. Far vedere che i punti $P = (1 : 1 : 1)$, $Q = (2 : 1 : 3)$ e $R = (0 : 1 : -1)$ stanno su una retta l. Trovare il punto $S \in l$ tale che il birapporto $(P\,Q\,R\,S)$ sia uguale a 3.

I punti P, Q, R stanno su una retta perché $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = 0$. Alternativamente, si osserva che $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ con $\lambda = 2$ e $\mu = -1$. Si cerca un vettore della forma

$$\rho \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho + 2\sigma \\ \rho + \sigma \\ \rho + 3\sigma \end{pmatrix},$$

tale che il punto $S = (\rho + 2\sigma : \rho + \sigma : \rho + 3\sigma)$ ha la proprietà che $(P\,Q\,R\,S) = \frac{\rho}{\sigma}\frac{\mu}{\lambda} = 3$. Siccome $\lambda = 2$ e $\mu = -1$, Questo implica che $\rho = -6\sigma$ e quindi che $S = (-4\sigma : -5\sigma : -3\sigma)$. Il punto S è quindi dato da $(4 : 5 : 3)$.

2. Sia $f : \mathbf{P}^1 \longrightarrow \mathbf{P}^1$ una proiettività che scambia i punti $(0 : 1)$ e $(1 : 0)$ e manda il punto $(1 : 2)$ nel punto $(3 : 1)$. Esibire una matrice 2×2 che induce f.

Il fatto che f scambia i punti $(0 : 1)$ e $(1 : 0)$ vuol dire che la matrice ha la forma $\begin{pmatrix} 0 & \mu \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$. Siccome $f(1 : 2) = (3 : 1)$, il vettore $\begin{pmatrix} 0 & \mu \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mu \\ \lambda \end{pmatrix}$ è proporzionale al vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Questo significa che $\det\begin{pmatrix} 2\mu & 1 \\ \lambda & 3 \end{pmatrix} = 0$ e quindi che $\lambda = 6\mu$. Vediamo che ogni matrice della forma $\begin{pmatrix} 0 & \mu \\ 6\mu & 0 \end{pmatrix}$ va bene. Per esempio la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Sia C la conica in $\mathbf{P}^2$ di equazione $x_0^2 - x_1x_2 = 0$. Esibire tre carte affini (schermi) di $\mathbf{P}^2$ nelle quali la parte "visibile" di C è rispettivamente un'ellisse, una parabola ed una iperbole.

Nella carta affine di equazione $x_0 = 1$, la parte 'visibile' della conica C ha equazione $1 - x_1x_2 = 0$. Si tratta di una iperbole. Nella carta affine di equazione $x_1 = 1$ la parte 'visibile' della conica C ha equazione $x_0^2 - x_2 = 0$. Si tratta di una parabola. Nella carta affine di equazione $x_2 = 1 - x_1$ la parte 'visibile' della conica C ha equazione $x_0^2 - x_1(1 - x_1) = 0$. Completando il quadrato, si trova l'equazione $x_0^2 + (x_1 - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$. Si tratta di un'ellisse.

4. Sia f una proiettività dalla retta proiettiva in se stessa con la proprietà che $f(A) = B$, $f(B) = C$ e $f(C) = A$ (come nella figura qua sotto). Costruire (=disegnare) il punto $f(D)$.

Sia l la retta nel disegno. I dati $f(A) = B$, $f(B) = C$ e $f(C) = A$ determinano una unica proiettività $f : l \longrightarrow l$. Per costruirla graficamente, si disegna una seconda retta m a caso e si proiettano da un centro scelto S i punti A, B e C su m. Siano, in quest'ordine, B', C' e A' le immagini di A, B e C. Poi si disegna la retta σ (di Steiner) che passa per $\overline{AB'} \cup \overline{A'B}$ e $\overline{CB'} \cup \overline{A'C}$. Una costruzione della proiettività f cercata è adesso la proiezione di centro S su m seguita dalla proiezione di centro B su σ, seguita dalla proiezione di centro B' su l. Applicando questa al punto D, si disegna $f(D)$.