Geometria 2. 1^o Esonero. 19 Gennaio 2004, 18:00–20:00.

COGNOME .... *NOME* ....

Inserire le risposte negli spazi predisposti, *accompagnandole con spiegazioni* chiare ed essenziali. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Ogni esercizio vale 7.5 punti.

1. Determinare una base ortonormale per il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ di equazione $x - y + 2z = 0$.

Per un vettore generico $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ nel piano π di equazione $x - y + 2z = 0$, abbiamo che $y = x + 2z$ e quindi $P = \begin{pmatrix} x \\ x+2z \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vediamo che i vettori $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ formano una base di π. Adesso ortonormalizziamo questa base tramite il procedimento di Gram-Schmidt. Divendo $\mathbf{e}_1$ per la sua lunghezza troviamo $\mathbf{e}_1^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Il secondo vettore è $\mathbf{e}_2 - \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1^* \rangle \mathbf{e}_1^*$. Siccome il prodotto scalare $\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1^* \rangle$ è uguale a $\sqrt{2}$, abbiamo che il secondo vettore, a meno di un multiplo scalare, è uguale a

$$\mathbf{e}_2 - \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1^* \rangle \mathbf{e}_1^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dividendo questo vettore per la sua lunghezza, troviamo che $\mathbf{e}_2^* = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La base cercata è $\{\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*\}$.

2. Sia R la rotazione intorno al punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ in senso antiorario di angolo di 60^o. Trovare la formula generale per la trasformazione R.

La formula per la rotazione R_0 di un punto $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ intorno all'origine in senso antiorario e di angolo di $\varphi = 60^o$ è data da

$$R_0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Per ottenere la formula per R, osserviamo che $R = T^{-1} \cdot R_0 \cdot T$ dove T è la traslazione di passo $\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Così troviamo la formula cercata

$$R \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sqrt{3}y + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3}x + \frac{1}{2}y + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

3. "Diagonalizzare" la forma quadratica X^2+YZ. In altre parole, trovare una matrice ortogonale U tale che il cambiamento di variabili

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix}$$

porti la forma quadratica nella forma $\lambda_1 {X'}^2 + \lambda_2 {Y'}^2 + \lambda_3 {Z'}^2$.

Il polinomio caratteristico della matrice simmetrica 3 per 3 associata alla forma quadratica è

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\left(\lambda^2 - \frac{1}{4}\right).$$

Gli autovalori sono quindi $\lambda = 1$, $\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$. Gli autospazi corrispondenti hanno dimensione 1 e sono ortogonali. Gli autospazi sono generati dagli autovettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Dividendo gli autovettori per le loro lunghezze, otteniamo una base ortonormale di autovettori. Essi sono le colonne della matrice U cercata:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

4. Sia m la retta in $\mathbf{R}^3$ data dal sistema di equazioni $\begin{cases} x+y=-1 \\ z-y=1 \end{cases}$. Calcolare un'equazione parametrica della proiezione ortogonale di m sul piano di equazione $x+y+z=0$.

Scegliamo i due punti $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sulla retta m e calcoliamo le loro proiezioni P' e Q' sul piano π di equazione $x+y+z=0$. La retta che passa per P ed è ortogonale a π ha equazione parametrica $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(t \in \mathbf{R})$. Il punto di intersezione con il piano π corrisponde a $t=0$ ed è uguale a $P' = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Similmente, la retta che passa per Q ed è ortogonale a π ha equazione parametrica $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(t \in \mathbf{R})$. Il punto di intersezione con il piano π corrisponde a $t = \frac{1}{3}$ ed è uguale a $Q' = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$. La retta cercata è la retta che passa per P' e Q'. Un'equazione parametrica è

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -4/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}.$$