COGNOME .... *NOME* ....

Inserire le risposte negli spazi predisposti, *accompagnandole con spiegazioni* chiare ed essenziali. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Ogni esercizio vale 7.5 punti.

1. Sia π_1 il piano in $\mathbf{R}^3$ di equazione $x + 2y = 1$ e sia π_2 il piano di equazione $x + y + 2z = 0$. Riflettere π_1 rispetto al piano π_2. Calcolare un'equazione cartesiana del piano riflesso.

Uno dei modi per calcolare il piano riflesso è il seguente. Calcoliamo prima l'intersezione l dei due piani. Si tratta di una retta. Con i metodi del corso di Geometria I si calcola l'equazione parametrica di tale retta $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(y \in \mathbf{R})$. Poi scegliamo il punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ che sta in π_1 ma non appartiene ad l. La retta m che passa per P ed è ortogonale al piano π_2 ha direzione $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Un'equazione parametrica per m è quindi data da $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $(t \in \mathbf{R})$. Il valore del parametro $t = 0$ corrisponde al punto P, mentre il punto di intersezione $m \cap \pi_2$ corrisponde alla soluzione dell'equazione $(1 + t) + t + 2(2t) = 0$, cioè a $t = -1/6$. La riflessione P' del punto P rispetto al piano π_2 corrisponde quindi a $t = 2 \cdot -1/6 = -1/3$ e così risulta $P' = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$. Il piano cercato è il piano che passa per la retta l e per il punto P'. I vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono paralleli al piano. Un vettore normale è quindi $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e un'equazione cartesiana del piano cercato è data da $-y + 2z = -1$.

2. Sia Q la quadrica in $\mathbf{R}^3$ di equazione
   (i) $x^2 + y^2 - 2yz + 2z^2 = 0$;
   (ii) $y^2 - 4yz + 4z^2 = 0$;
   (iii) $x^2 + xy + y^2 - z = 1$;
   (iv) $x^2 + y^2 - 2yz + z^2 = 0$.
   Dire di che tipo di quadrica si tratta.

Questo è l'Eserc 4.6, parti (m), (n), (o), (p) distribuito al corso. Si tratta rispettivamente di un punto, un piano, un paraboloide e una retta.

3. Siano $P = (0:1)$, $Q = (1:0)$ e $R = (1:1)$. Sia $f : \mathbf{P}^1 \longrightarrow \mathbf{P}^1$ una proiettività con la proprietà che $f(P) = Q$, $f(Q) = R$ e $f(R) = P$. Determinare una matrice 2×2 che induce f.

(Si veda l'Eserc 2. del 2^o esonero) Siccome abbiamo che $f(1:0) = (1:1)$ e $f(0:1) = (1:0)$, la matrice cercata ha la forma $A = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$ per certi $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ non nulli. Siccome $f(1:1) = (0:1)$, il vettore $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda+\mu \\ \lambda \end{pmatrix}$ è proporzionale al vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Questo vuol dire che $\det\begin{pmatrix} \lambda+\mu & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} = 0$ e quindi che $\lambda + \mu = 0$. Ogni matrice della forma $A = \begin{pmatrix} \lambda & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$ con $\lambda \neq 0$ va quindi bene. Per esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Sia f una proiettività dalla retta proiettiva in se stessa con la proprietà che $f(A) = A$, $f(B) = C$ e $f(C) = D$ (come nella figura qua sotto). Costruire un secondo punto fisso di f.

Questo è una leggera variazione dell'Eserc. 6.8 distribuito al corso. Sia l la retta nel disegno. Per costruire il secondo punto fisso si disegna prima una retta ausiliaria m che passa per il punto A. Poi si sceglie un punto S che non sta sulle due rette e si proiettano i punti B e C su m. In altre parole, si disegna B', punto di intersezione della retta $\overline{BS}$ con m e si disegna C', punto di intersezione della retta $\overline{CS}$ con m. I punti B' e C' stanno quindi su m. Adesso si disegna S', punto di intersezione di $\overline{B'C}$ e di $\overline{C'D}$. Siccome la proiettività f e la proiettività data dalla proiezione di centro S di l su m seguita dalla proiezione di centro S' da m su l coincidono sui tre punti distinti A, B e C, allora coincidono dappertutto. Il secondo punto fisso di f è il punto di intersezione di l con la retta $\overline{S'S}$.