

COGNOME NOME

Inserire le risposte negli spazi predisposti, *accompagnandole con spiegazioni* chiare ed essenziali.

NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Ogni esercizio vale 7.5 punti.

1. Sia $f : \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^1$ una proiettività che scambia i punti $(0 : 1)$ e $(1 : 0)$ e manda il punto $(1 : 2)$ nel punto $(3 : 1)$. Esibire una matrice 2×2 che induce f .

Il fatto che f scambia i punti $(0 : 1)$ e $(1 : 0)$ vuol dire che la matrice ha la forma $\begin{pmatrix} 0 & \mu \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$.

Siccome $f(1 : 2) = (3 : 1)$, il vettore $\begin{pmatrix} 0 & \mu \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mu \\ \lambda \end{pmatrix}$ è proporzionale al vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Questo significa che $\det \begin{pmatrix} 2\mu & 1 \\ \lambda & 3 \end{pmatrix} = 0$ e quindi che $\lambda = 6\mu$. Vediamo che ogni matrice della forma $\begin{pmatrix} 0 & \mu \\ 6\mu & 0 \end{pmatrix}$ va bene. Per esempio la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Sia C la conica in \mathbf{P}^2 di equazione $x_0^2 - x_1x_2 = 0$. Esibire tre carte affini (schermi) di \mathbf{P}^2 nelle quali la parte “visibile” di C è rispettivamente un’ellisse, una parabola ed una iperbole.

Nella carta affine di equazione $x_0 = 1$, la parte ‘visibile’ della conica C ha equazione $1 - x_1x_2 = 0$. Si tratta di una iperbole. Nella carta affine di equazione $x_1 = 1$ la parte ‘visibile’ della conica C ha equazione $x_0^2 - x_2 = 0$. Si tratta di una parabola. Nella carta affine di equazione $x_2 = 1 - x_1$ la parte ‘visibile’ della conica C ha equazione $x_0^2 - x_1(1 - x_1) = 0$. Completando il quadrato, si trova l’equazione $x_0^2 + (x_1 - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$. Si tratta di un’ellisse.

3. Sia l la retta in \mathbf{R}^3 di equazione parametrica $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ($t \in \mathbf{R}$) e sia m la retta di equazione parametrica $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ($s \in \mathbf{R}$). Ruotare la retta l intorno alla retta m di angolo di 45° . Determinare un'equazione parametrica della retta ruotata.

Siccome la retta m passa per l'origine, ogni rotazione intorno alla retta m è un'applicazione lineare. Avendo $\cos(45^\circ) = \sin(45^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, in questo caso la matrice corrispondente è

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Adesso moltiplichiamo il vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sulla retta l e il vettore direzionale $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ di l per la matrice A . Troviamo i vettori $A(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ e $A(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$. La retta ruotata contiene il punto $A(\mathbf{v})$ e ha direzione $A(\mathbf{w})$. Un'equazione parametrica della retta ruotata è quindi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (t \in \mathbf{R}).$$

4. Sia f una proiettività dalla retta proiettiva in se stessa con la proprietà che $f(A) = B$, $f(B) = C$ e $f(C) = A$ (come nella figura qua sotto). Costruire (=disegnare) il punto $f(D)$.

Sia l la retta nel disegno. I dati $f(A) = B$, $f(B) = C$ e $f(C) = A$ determinano una unica proiettività $f : l \rightarrow l$. Per costruirla graficamente, si disegna una seconda retta m a caso e proietta da un centro scelto S i punti A , B e C su m . Siano, in quest'ordine, B' , C' e A' le immagini di A , B e C . Poi si disegna la retta σ (di Steiner) che passa per $\overline{AB'} \cup \overline{A'B}$ e $\overline{CB'} \cup \overline{A'C}$. Una costruzione della proiettività f cercata è adesso la proiezione di centro S su m seguita dalla proiezione di centro B su σ , seguita dalla proiezione di centro B' su l . Applicando questa al punto D , si disegna $f(D)$.