Elementi di algebra e logica. 1^o Esonero. 4 aprile 2005, 16:00–18:00.

COGNOME .... *NOME* ....

Inserire le risposte negli spazi predisposti, *accompagnandole con spiegazioni* chiare ed essenziali. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Ogni esercizio vale 7.5 punti.

1. Siano $G_n \in \mathbf{Z}$ definiti ricorsivamente da $G_1 = 1$, $G_2 = 1$ e $G_n = G_{n-1} + 3G_{n-2}$ per $n \geq 3$.
   (a) Calcolare G_5.
   (b) Dimostrare per induzione che $G_{n+1}^2 - G_n G_{n+2} = (-3)^n$ per ogni $n \in \mathbf{N}$.

(a) Abbiamo che $G_3 = 1+3\cdot 1 = 4$, $G_4 = 4+3\cdot 1 = 7$ e quindi $G_5 = 7+3\cdot 4 = 19$.
(b) Siccome abbiamo che $G_2^2 - G_1 G_3 = 1^2 - 1\cdot 3 = -2$, l'affermazione è corretta per $n = 1$. Supponiamo adesso che la formula valga per n e dimostriamola per $n+1$. Abbiamo che

$$\begin{aligned} G_{n+2}^2 - G_{n+1}G_{n+3} &= G_{n+2}(G_{n+1} + 3G_n) - G_{n+1}(G_{n+2} + 3G_{n+1}) \\ &= 3(G_{n+2}G_n - G_{n+1}^2) \\ &= -3(-3)^n = (-3)^{n+1}. \end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio usiamo l'ipotesi induttiva, ossia l'uguaglianza $G_{n+1}^2 - G_n G_{n+2} = (-3)^n$.

2. Determinare gli interi x fra 0 e 200 che soddisfano

$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod 7, \\ x \equiv 1 \pmod{13}. \end{cases}$$

La prima equazione ci dice che $x = 3 + 7k$ per un certo $k \in \mathbf{Z}$. Sostituendo nella seconda equazione troviamo che $3 + 7k \equiv 1 \pmod{13}$ e quindi $7k \equiv -2 \pmod{13}$.

Usando l'algoritmo euclideo (oppure con dei tentavi mirati) si trova che 2 è l'inverso moltiplicativo di 7 (mod 13). Moltiplicando per 2 si trova quindi che $k \equiv 2\cdot 7k \equiv -2\cdot 2 = -4 \pmod{13}$. In altre parole, si ha che $k = -4 + 13m$ per un certo $m \in \mathbf{Z}$. Sostituendo questo nella formula di x troviamo che $x = 3 + 7(-4 + 13m) = -25 + 91m$ per un certo $m \in \mathbf{Z}$.

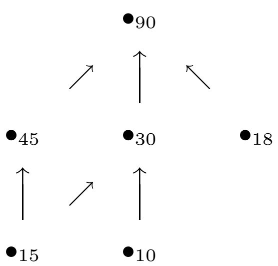
Per $m = 1$ si ha che $x = 66$ e per $m = 2$ si ha che $x = 157$. Queste sono le uniche soluzioni $0 \leq x \leq 200$.

3. Sia $A = \{k \in \mathbf{Z} : 1 \leq k \leq 1000\}$. Sia R la relazione su A data da: "n è in relazione con m se e soltanto se n e m hanno lo stesso numero ci cifre".
   (a) Dimostrare che R è una relazione di equivalenza.
   (b) Quante classi di equivalenza ci sono?

(a) Ogni numero ha lo stesso numero di cifre di se stesso. Se n ha lo stesso numero di cifre di m, allora m ha lo stesso numero di cifre di n. Se n ha lo stesso numero di cifre di m e m ha lo stesso numero di cifre di k anche n ha lo stesso numero di cifre di k. La relazione è dunque riflessiva, simmetrica e transitiva. Si tratta quindi di una relazione di equivalenza.
(b) Due numeri stanno nella stessa classe se e solo se hanno lo stesso numero di cifre. Una classe consiste dei numeri che hanno tutti esattamente k cifre. Siccome 1000 ha 4 cifre, abbiamo che $1 \leq k \leq 4$. Ci sono quindi 4 classi di equivalenza.

4. Sia $B = \{k \in \mathbf{Z} : k \text{ divide } 90 \text{ e } k > 9\}$ e sia R su B la relazione data da "n è in relazione con m se e soltanto se n divide m".
   (a) Dimostrare che si tratta di un ordinamento parziale.
   (b) Disegnare il diagramma di Hasse.
   (c) Determinare gli elementi minimali e massimali.
   (d) Esiste un massimo assoluto? Esiste un minimo assoluto?

(a) Ogni numero divide se stesso. Dati $n, m > 0$, se n divide m ed m divide n, allora $n = m$. Se n divide m ed m divide k, allora n divide k. Concludiamo che la relazione è rifelessiva, anti-simmetrica e transitiva. Si tratta quindi di un ordinamento parziale.
(b) Abbiamo che $B = \{10, 15, 18, 30, 45, 90\}$. Ecco il diagramma di Hasse



(c) 90 è l'unico elemento massimale. Gli elementi minimali sono 10, 15 e 18.
(d) 90 è un massimo assoluto. Non c'è un minimo assoluto.