1. Sia X un insieme e sia $\mathcal{P}(X)$ l'insieme delle parti di X. Indichiamo con $\cap$, $\cup$ e $^-$ rispettivamente le operazioni di *intersezione*, *unione* e *complementare* in $\mathcal{P}(X)$. Verificare che $(\mathcal{P}(X), \cap, \cup, ^-)$ è un'algebra di Boole.

2. Dato un numero naturale n, si denoti $\mathbf{D}_n = \{m \in \mathbf{N} : m \text{ divide } n\}$. Supponiamo che $n = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k$ dove i numeri p_i sono primi *distinti*. Dato $a \in \mathbf{D}_n$, si definisca $\bar{a} = \frac{n}{a}$.
   (a) Verificare che $(\mathbf{D}_n, \mathrm{mcd}, \mathrm{mcm}, ^-)$ è un'algebra di Boole con 2^k elementi.
   (b) Sia $X = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$. Verificare che l'applicazione $\mathbf{D}_n \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ che manda un divisore d di n nell'insieme dei suoi divisori primi, è un isomorfismo di algebre di Boole (ossia un'applicazione biiettiva che rispetta le operazioni delle due algebre).

3. Sia $\mathcal{B}$ l'insieme dei sottoinsiemi $B \subset \mathbf{N}$ che soddisfano una delle seguenti condizioni: la cardinalità di B è finita oppure la cardinalità del complementare di B è finita.
   (a) Dimostrare che $(\mathcal{B}, \cap, \cup, ^-)$ è un'algebra di Boole numerabile.

4. Sia $(\mathcal{A}, \otimes, \oplus, ^-)$ l'algebra Booleana formata dalle terne $\mathcal{A} = \{000, 010, 001, 100, 110, 101, 011, 111\}$ con le operazioni definite cifra per cifra da

$$\begin{aligned} 0 \oplus 0 &= 0, \quad 1 \oplus 0 = 0 \oplus 1 = 1 \oplus 1 = 1, \\ 1 \otimes 1 &= 1, \quad 1 \otimes 0 = 0 \otimes 1 = 0 \otimes 0 = 0, \\ \bar{0} &= 1, \quad \bar{1} = 0. \end{aligned}$$

   (a) Qual è l'identità per $\oplus$?
   (b) Qual è l'identità per $\otimes$?
   (c) Calcolare le seguenti espressioni:

$$(001 \otimes 001) \oplus 100, \qquad (111 \oplus 001) \oplus 100, \qquad (001 \otimes \overline{001}) \oplus \overline{101 \otimes 010}.$$

5. Sia B un'algebra di Boole. Scriviamo $\overline{x}$ per il complemento di $x \in B$. Per $x, y \in B$ definiamo $x \oplus y = x\overline{y} + \overline{x}y$. Siano $x, y, z \in B$. Dimostrare le seguenti uguaglianze o darne un controesempio.
   (a) $x \oplus y = y \oplus x$; (c) $x \oplus y = (x + y)\overline{xy}$; (e) $x + (y \oplus z) = (x + y) \oplus (x + z)$;
   (b) $x \oplus x = 0$; (d) $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$; (f) $x \oplus (y + z) = (x \oplus y) + (x \oplus z)$.

6. Siano x, y, z, t variabili di un algebra di Boole. Scrivere le seguenti espressioni booleane come somma di prodotti. Scriverle anche in forma normale disgiuntiva.
   (a) $x'y((zt)' + x')'$; (b) $(x + x'y + xy'z)(x'z)$; (c) $x + x'yz$.

7. Siano x, y, z variabili di un algebra di Boole. Trovare espressioni *minimali* Booleane per:
   (a) $x'y + x'y'$; (b) $xy + xy'$; (c) $xy + xy' + x'y + xy'$; (d) $xyz + xy'z + x'yz + x'y'z + x'y'z'$.

8. Un prodotto fondamentale P si dice un *implicante minimale* oppure un *implicante primo* di un espressione booleana E quando si ha $E + P = E$, ma nello stesso tempo $E + Q \neq E$ per ogni prodotto Q diverso da P presente in P.
   Sia $E = xy' + xyz' + x'yz'$ e sia $P = xz'$.
   (a) Far vedere che $E + P = E$.
   (b) Dimostrare che $x + E \neq E$ e $z' + E \neq E$ e concludere che P è un implicante minimale di E.

9. Scrivere le seguenti espressioni in un'algebra di Boole come somma di implicanti minimali:
   (a) $xyz + xy'z + x'yz + x'y'z + x'y'z'$; (b) $txyz' + tx'yz + tx'yz' + t'xyz + t'xy'z + t'x'yz + t'x'y'z$.