1. Sia X un insieme e sia $\mathcal{P}(X)$ l'insieme delle parti di X. Indichiamo con $\cap$ e $\cup$ le operazioni di intersezione e di unione fra sottoinsiemi di X. Dimostrare che $(\mathcal{P}(X), \cap, \cup)$ è un reticolo.
2. Sia $\mathbf{N}$ l'insieme dei numeri naturali con la relazione di ordine parziale data da $m \leq n$ *se* m *divide* n.
   (a) Dimostrare che per ogni coppia $m, n \in \mathbf{N}$ esiste $z \in \mathbf{N}$ tale che $z \leq n$, $z \leq m$ e per ogni $z' \in \mathbf{N}$ con $z' \leq n$, $z' \leq m$ si ha che $z' \leq z$. Similmente, dimostrare che per ogni coppia $m, n \in \mathbf{N}$ esiste $w \in \mathbf{N}$ tale che $n \leq w$, $m \leq w$ e per ogni $w' \in \mathbf{N}$ con $w' \leq n$, $w' \leq m$ si ha che $w \leq w'$.
   (b) Concludere che $\inf\colon \mathbf{N} \times \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ e $\sup\colon \mathbf{N} \times \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ sono operazioni binarie su $\mathbf{N}$, che coincidono rispettivamente col *massimo comun divisore* e il *minimo comune multiplo.*
   (c) Dimostrare che $(\mathbf{N}, \mathrm{mcd}, \mathrm{mcm})$ è un reticolo.
3. Stabilire quali dei seguenti insiemi parzialmente ordinati ($A \leq B$ se e solo se $A \subseteq B$) sono reticoli:
   (a) $\{A \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4,5\}) : |A| \text{ dispari } \}$;
   (b) $\{A \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4,5\}) : |A| \geq 2 \}$;
   (c) $\{A \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4,5\}) : A \supset \{1,3\} \}$;
   (d) $\{A \in \mathcal{P}(\{1,2,3\}) : |A| \leq 1 \text{ oppure } |A| = 3\}$.
4. Siano $(L, \vee, \wedge)$ e $(L', \vee', \wedge')$ due reticoli e siano $(L, \leq)$ e $(L', \leq')$ le corrispondenti relazioni di ordine parziale. Una funzione biettiva $f : L \to L'$ si dice un *isomorfismo di reticoli* se: $f(x \vee y) = f(x) \vee' f(y)$ e $f(x \wedge y) = f(x) \wedge' f(y)$ per ogni $x, y \in L$. In tal caso i due reticoli sono detti *isomorfi.*
   (a) Dimostrare che se $f : L \to L'$ è un isomorfismo di reticoli allora anche $f^{-1} : L' \to L$ lo è;
   (b) Dimostrare che una funzione biettiva $f : L \to L'$ è un isomorfismo di reticoli se vale la seguente condizione: dati $x, y \in L$, si ha che $x \leq y$ se e solo se $f(x) \leq' f(y)$.
   (c) Sia $X = \{1, 2\}$ e si consideri il reticolo $(\mathcal{P}(X), \cap, \cup)$. Determinare quanti sono gli isomorfismi di reticolo $f : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$.
5. Dato un numero naturale n, si denoti $\mathbf{D}_n = \{m \in \mathbf{N} : m \text{ divide } n\}$, munito della relazione d'ordine parziale $m \leq k$ se e solo se m divide k. Stabilire quanti sono gli isomorfismi di reticolo $f : \mathbf{D}_{30} \to \mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$.
6. Per le coppie $(n, m) = (6, 15)$, $(12, 18)$ e $(30, 105)$,
   (a) stabilire se i reticoli $\mathbf{D}_n$ e $\mathbf{D}_m$ sono isomorfi.
   (b) In caso affermativo determinare tutti gli isomorfismi di reticolo $f : \mathbf{D}_n \to \mathbf{D}_m$.
7. (a) Stabilire se i reticoli $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$ e $\mathbf{D}_{24}$ sono isomorfi.
   (b) Stabilire se uno dei reticoli del punto (a) è isomorfo a $\mathbf{D}_{30}$.
8. Si consideri il reticolo $L = \{A \in \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\}) : |A| \leq 1 \text{ oppure } |A| = 4\}$ (con $A \wedge B = A \cap B$ e $A \vee B = A \cup B$).
   (a) Dimostrare che L è limitato.
   (b) Stabilire se ci sono elementi il cui complemento non è unico.
   (c) Stabilire se L è un reticolo distributivo.
9. Quali dei reticoli $\mathbf{D}_{70}$, $\mathbf{D}_{18}$ e $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a\}))$ sono reticoli con complemento?
10. Stabilire se i seguenti reticoli sono reticoli distributivi, reticoli con complemento, reticoli con complemento unico:
    (a) $\{1, 2, 3, 4, 9, 12, 18, 36\}$, munito delle operazioni $a \wedge b = \mathrm{mcd}(a, b)$, $a \vee b = \mathrm{mcm}(a, b)$,
    (b) $\mathbf{D}_{12}$,
    (c) $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$,
    (d) $\mathbf{D}_{30}$,
    (e) $\{1, 6, 10, 15, 30, 60, 90, 180\}$, munito delle operazioni $a \wedge b = \mathrm{mcd}(a, b)$.