1. Determinare il resto delle divisioni per 3, 9, 4, 11 del numero 3548917.
2. Far vedere che $1234567 \times 90123 \equiv 1 \pmod{10}$ e $2468 \times 13579 \equiv -3 \pmod{25}$.
3. Calcolare $\mathrm{mcd}(623, 413)$, $\mathrm{mcd}(1014, 273)$, $\mathrm{mcd}(1122, 105)$ e $\mathrm{mcd}(2244, 418)$.
4. Siano a e b interi con $\mathrm{mcd}(a, b) = d$. Dimostrare che $\mathrm{mcd}(a/d, b/d) = 1$.
5. Siano n, m due numeri naturali. Siano $\mathrm{mcd}(n, m)$ e $\mathrm{mcm}(n, m)$ il massimo comun divisore e il minimo comune multiplo fra n ed m. Dimostrare che $\mathrm{mcm}(n, m) \cdot \mathrm{mcd}(n, m) = nm$.
6. Per i seguenti numeri n e m, determinare $a, b \in \mathbf{Z}$ tali che $an + bm = \mathrm{mcd}(n, m)$.
   (a) $n = 4$ e $m = 30$; (c) $n = 103$ e $m = 101$; (e) $n = 221$ e $m = 169$;
   (b) $n = 14$ e $m = 40$; (d) $n = 91$ e $m = 0$; (g) $n = 10001$ e $m = 9999$.
7. (a) Stabilire se esistono $s, t \in \mathbf{Z}$ tali che $24s + 18t = 20$;
   (b) Stabilire se esistono $s, t \in \mathbf{Z}$ tali che $24s + 18t = -12$;
   (c) Stabilire se esistono $s, t \in \mathbf{Z}$ tali che $24s + 18t = 3$.
8. Determinare tutti i numeri primi $100 \le p \le 120$.
9. (a) Dimostrare che se $n \ge 2$ non è primo, allora esiste un primo $p \le \sqrt{n}$ che divide n.
   (b) Sfruttare il risultato (a) per dimostrare che 467 è primo
10. Dimostrare che il numero 123456789 non è primo.
11. Fattorizzare i seguenti numeri in fattori primi.
    (a) 91; (c) $15^2 - 2^2$; (e) $2^{10} - 1$; (g) 10001;
    (b) 210; (d) $10!$; (f) $2^{11} - 1$; (h) 100000003.
12. Determinare tutte le soluzioni intere $x \in \mathbf{Z}$ delle seguenti congruenze
    (a) $x \equiv 3 \pmod{11}$; (b) $3x \equiv 1 \pmod{5}$; (c) $9x \equiv 0 \pmod{30}$.
13. Stabilire se per le seguenti congruenze esistono soluzioni intere $x \in \mathbf{Z}$. In caso affermativo, determinarle tutte. (a) $5x \equiv 8 \pmod{17}$ (b) $9x \equiv 26 \pmod{30}$; (c) $9x \equiv 24 \pmod{30}$.
14. Determinare tutte le soluzioni $x \in \mathbf{Z}$ dei seguenti sistemi di congruenze

    (a) $\begin{cases} x \equiv 4 \pmod{8}, \\ x \equiv 3 \pmod{5}, \\ x \equiv 4 \pmod{9}; \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 5x \equiv 4 \pmod{8}, \\ 3x \equiv 3 \pmod{5}, \\ 2x \equiv 4 \pmod{9}; \end{cases}$ (c) $\begin{cases} 9x \equiv 20 \pmod{8}, \\ x \equiv -2 \pmod{5}, \\ -8x \equiv 4 \pmod{9}; \end{cases}$
15. Nell'antica Cina, ogni reggimento era formato da 1000 soldati. Per assicurarsi che ogni reggimento fosse al completo, si chiedeva agli uomini di mettersi in fila per 7, poi per 11 e, in fine per 13. Se, nei tre casi , mancava un soldato all'ultima fila, si era certi che il reggimento fosse al completo. Perché?
16. Sia $x = x_n x_{n-1} \ldots x_0)$ un numero intero positivo rappresentato in base 10. Far vedere che $x \equiv x_n + x_{n-1} + \ldots + x_0 \pmod{9}$. Usare questo risultato per dimostrare che la moltiplicazione $54321 \times 98765 = 5363013565$ è sbagliata.
17. Andare al link `http://www.mat.uniroma2.it/~eal/psychic.swf`. Spiegare come mai la sfera magica riesce a sempre indovinare il simbolo giusto.
18. Sia $x = x_n x_{n-1} \ldots x_0$ un numero intero positivo rappresentato in base 10. Far vedere che $x \equiv x_0 - x_1 + x_2 - \ldots + (-1)^n x_n \pmod{11}$. Decidere se 1213141516171819 è divisibile per 11.
19. Determinare il resto della divisione per 5 di $33213454^{27221447}$. Determinare il resto della divisione per 7 di $19^{19^{19}}$.
20. (a) Determinare il resto delle divisioni per 5, per 7 e per 11 di 3^{302}; determinare il resto della divisione per 385 di 3^{302} (si noti che $385 = 5 \cdot 7 \cdot 11$).
    (b) Determinare il resto delle divisioni per 7, per 11 e per 13 di 5^{2003}; determinare il resto della divisione per 1001 di 5^{2003} (si noti che $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$).
21. Sia $n \in \mathbf{N}$. Dimostrare
    (a) Se $2^n - 1$ è primo, allora n è primo.
    (b) Se $2^n + 1$ è primo, allora n è una potenza di 2.
    (c) Valgono le affermazioni inverse di (a) e (b)?