1. Per le seguenti relazioni R di $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ stabilire quali sono simmetriche, rifflessive o transitive.
   (a) $R = \{(n, m) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} : n = m\}$; (b) $R = \{(n, m) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} : |n - m| = 5\}$;
   (c) $R = \{(n, m) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} : n \geq m\}$; (d) $R = \{(n, m) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} : n^2 \equiv m^2 \pmod 7\}$.
2. Sia $X = \{1, 2, 3, 4\}$.
   (a) Esibire una relazione su di X, che sia riflessiva, simmetrica, ma non transitiva.
   (b) Esibire una relazione su di X, che sia simmetrica, transitiva ma non riflessiva.
   (c) Esibire una relazione su di X, che sia riflessiva, transitiva, ma non simmetrica.
3. Sia $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.
   (i) Consideriamo su X la relazione: xRy *se* $x+y$ *è un numero pari*. Dimostrare che R è una relazione di equivalenza e determinare le classi di equivalenza corrispondenti.
   (ii) Consideriamo su X la relazione: $xR'y$ *se* $x + y$ *è un numero dispari*. Determinare se R' è una relazione di equivalenza.
4. Sia $A = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ e sia $R = \{((a, b), (c, d)) \in A \times A : a + d = b + c\}$.
   (a) Dimostrare che si tratta di una relazione di equivalenza.
   (b) Sia $\tilde{A} =$ l'insieme delle classi di equivalenza di R. Dimostrare che la mappa $f : \tilde{A} \longrightarrow \mathbf{Z}$ che associa la differenza $a - b$ alla classe di (a, b), è ben definita ed è una biezione.
5. Sia A un insieme di n elementi. Per $i = 0, 1, \ldots, n$, sia $P_i \subset \mathcal{P}(A)$ la collezione dei sottoinsiemi di A che possiedono esattamente i elementi.
   (a) Dimostrare che gli insiemi P_i formano una partizione di $\mathcal{P}(A)$.
   (b) Esibire una relazione di equivalenza su $\mathcal{P}(A)$ che induce la partizione della parte (a).
6. Quante relazioni di equivalenza distinte si possono definire sull'insieme $\{a, b, c, d\}$?
7. Con $\mathcal{P}(A)$ indichiamo l'insieme delle parti di un insieme A. Sia $X = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$. Definiamo un ordinamento parziale su X ponendo $A \leq B$ quando $A \subset B$ per $A, B \in X$. Disegnare il diagramma di Hasse.
8. L'insieme $\{2, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 48, 60, 72\}$ è ordinato mediante $d \leq d'$ quando d divide d'. Disegnare il diagramma di Hasse di questo ordinamento.
   (a) Determinare gli elementi massimali e minimali.
   (b) Esibire, se esistono, massimo e minimo assoluti.
   (c) Trovare i maggioranti di $\{2, 9\}$ e, se esiste, $\sup(\{2, 9\})$.
   (d) Trovare i minoranti di $\{60, 72\}$ e, se esiste, $\inf(\{60, 72\})$.
9. Sia $X \subset \mathcal{P}\{1, 2, 3, 4\}$ dato da $X = \{\{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$. Definiamo un ordinamento parziale su X ponendo $A \leq B$ quando $A \subset B$ per $A, B \in X$. Disegnare il diagramma di Hasse di questo ordinamento.
   (a) Determinare gli elementi massimali e minimali.
   (b) Esibire, se esistono, massimo e minimo assoluti.
   (c) Trovare i maggioranti di $\{\{2, \}, \{4\}\}$ e, se esiste, $\sup(\{2, \}, \{4\})$.
   (d) Trovare i minoranti di $\{\{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$ e, se esiste, $\inf(\{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\})$.
10. Si consideri su $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ l'ordinamento lessicografico:
    $(m, n) \leq (p, q)$ se $m < p$, oppure se $m = p$ e $n \leq q$.
    (a) Dimostrare che è un ordinamento parziale.
    (b) Sia $A = \{(1, 2), (4, 5), (7, 7), (8, 9), (3, 4), (3, 6), (7, 2)\} \subset \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, con l'ordinamento indotto. Disegnare il diagramma di Hasse di questo ordinamento su A. Determinare gli elementi massimali e minimali. Esibire, se esistono, massimo e minimo assoluti.
11. Sia $A = \{a, b, c, d, e\}$ con la relazione
    $$R = \{(a, b), (a, c), (a, e), (b, e), (c, a), (c, d), (e, a)(e, b), (e, c), (e, d)\}.$$
    Disegnare il grafo diretto associato. Scriverne la matrice associata.
12. Sia $A = \{a, b, c, d, e\}$. Determinare la chiusura transitiva delle seguenti relazioni:
    (a) $\{(a, c),\ (b, d),\ (c, a),\ (d, b),\ (e, d)\}$.
    (b) $\{(b, c),\ (b, e),\ (c, e),\ (d, a),\ (e, b),\ (e, c)\}$.
    (c) $\{(a, b),\ (a, c),\ (a, e),\ (b, a),\ (b, c),\ (c, a),\ (c, b),\ (d, a),\ (e, d)\}$.
    (d) $\{(a, e),\ (b, a),\ (b, d),\ (c, d),\ (d, a),\ (d, c),\ (e, a),\ (e, b),\ (e, c),\ (e, e)\}$.