COGNOME .... *NOME* ....

Inserire le risposte negli spazi predisposti, *accompagnandole con spiegazioni* chiare ed essenziali. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Ogni esercizio vale 7.5 punti.

1. Dire quali delle relazioni seguenti sono relazioni di equivalenza e quali relazioni d'ordine parziale (o ordinamenti parziali):

   a) Sull'insieme delle parti $X = P(\mathbf{Z})$ di $\mathbf{Z}$, la relazione definita da : "A è in relazione con B se e solo se la loro intersezione è non vuota";

RISPOSTA La relazione non é transitiva poiché $(A, B), (B, C) \in R$ non implica $(A, C) \in R$; Controesempio: $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$ e $C = \{3, 4\}$. Di conseguenza non é una relazione di equivalenza né una relazione di ordine parziale.

   b) Sull'insieme dei numeri interi $\mathbf{Z}$ la relazione R definita da: "n è in relazione con m se e solo se il loro prodotto è un quadrato";

RISPOSTA Si tratta di una relazione di equivalenza. E' riflessiva poiché $n \cdot n = n^2$ é sempre un quadrato. E' simmetrica per la proprietá commutativa della moltiplicazione. E' transitiva poiché se $n \cdot m = h^2$ e $m \cdot s = k^2$, con h ek interi, $n \cdot s = [(h \cdot k)/m]^2$ il che implica che $[(h \cdot k)/m]$ é un intero e quindi che $(n, s) \in R$.

   c) Sull'insieme delle parti di $\mathbf{Z}$, la relazione definita da : "A è in relazione con B se e solo se la loro unione è $\mathbf{Z}$ stesso";

RISPOSTA La relazione non é transitiva; Controesempio: siano $A = \{1\}$, $B = \mathbf{Z}$ e $C = \{2\}$, allora (A, B), $(B, C) \in R$ ma (A, C) non appartiene ad R. Di conseguenza non è una relazione di equivalenza né una relazione di ordine parziale.

   d) Sull'insieme delle parti $X = P(\mathbf{Z})$ di $\mathbf{Z}$, la relazione definita da : "A è in relazione con B se e solo se A è contenuto in B";

RISPOSTA Si tratta di una relazione d'ordine. E' riflessiva poiché $A \subset A$ per ogni insieme A. E' antisimmetrica poiché se $A \subset B$ e $B \subset A$, allora $A = B$. E' transitiva poiché se $A \subset B$ e $B \subset C$, allora $A \subset C$. (Per chi avesse inteso l'inclusione stretta la relazione non è riflessiva di conseguenza non è una relazione di equivalenza né una relazione di ordine parziale.)

   e) Sull'insieme delle parti di $\mathbf{Z}$, la relazione definita da : "A è in relazione con B se e solo se la cardinalitá di A è minore della cardinalitá di B";

RISPOSTALa relazione non è simmetrica né antisimmetrica ($|A| = |B|$ non implica $A = B$) di conseguenza non é una relazione di equivalenza né una relazione di ordine parziale.

2. Dimostrare per induzione che

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = [(n(n+1))/2]^2 \; ; \quad \forall \;\; n > 1$$

RISPOSTA
Verifichiamo $P(2)$: $1 + 8 = 9$ e $[(2 \cdot 3)/2]^2 = 9$.
Supponiamo $P(n)$ vera. Allora

$$[((n+1)(n+2))/2]^2 = \{[n(n+1) + 2(n+1)]/2\}^2 = [(n(n+1))/2]^2 + (n+1)^2 + n(n+1)^2 =$$

$$= [(n(n+1))/2]^2 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3$$

cioé $P(n+1)$ è vera.

3. Risolvere, se possibile, le equazioni seguenti

   a)

$$8x \equiv 4 \pmod{12}$$

RISPOSTA L'equazione puó essere risolta poiché $(8, 12) = 4$ che divide 4. Si ricava $x = 2$ dall'identitá di Bezout.

b)

$$8x \equiv 3(\pmod{12})$$

RISPOSTA L'equazione non puó essere risolta poiché $(8, 12) = 4$ che non divide 3.

b) Calcolare l'inverso di 17 modulo 23 (cioé trovare x tale che $17x \equiv 1 \pmod{23}$).

RISPOSTA L'inverso esiste poiché $(17, 23) = 1$. Grazie all'identitá di Bezout troviamo $x = -4$. Modulo 23 la soluzione è quindi 19.

c)

$$55x + 32y = 1$$

RISPOSTA L'equazione non puó essere risolta poiché $(55, 32) = 1$. L'identitá di Bezout ci fornisce $x = 7$ e $y = -12$.

4. Dire se il seguente sistema ammette soluzione e, in tal caso, calcolare una soluzione x compresa tra zero e 330

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{11}, \\ x \equiv 2 \pmod{6}. \\ x \equiv 2 \pmod{5} \end{cases}$$

RISPOSTA Il teorema cinese dei resti ci dice che il sistema ammette soluzione poiché $(11, 6) = (6, 5) = (11, 5) = 1$. Dalle prime due equazioni otteniamo

$$x \equiv 56 \pmod{66}.$$

Combinando con la terza equazione otteniamo

$$x \equiv 122 \pmod{330}.$$

La soluzione richiesta è quindi $x = 122$.