Elementi di algebra e logica. 3^o Appello. 5 settembre 2005, 16:00–18:00.

CORREZIONE

1. Calcolare la classe di congruenza modulo 11 dell'intero

$$5^{10^{5^{10^{5^{10}}}}} + 10^{5^{10^{5^{10^{5}}}}}$$

Soluzione. Osserviamo che 11 è un numero primo, per cui $\phi(11) = 10$. Per il piccolo teorema di Fermat, abbiamo quindi $5^{10^{5^{10^{5^{10}}}}} \equiv 1 \pmod{11}$. Osserviamo inoltre che $10 \equiv -1 \pmod{11}$, dunque ogni sua potenza dispari è ancora congrua a -1 e dunque $10^{5^{10^{5^{10^{5}}}}} \equiv -1 \pmod{11}$. Se ne deduce che

$$5^{10^{5^{10^{5^{10}}}}} + 10^{5^{10^{5^{10^{5}}}}} \equiv 0 \pmod{11}.$$

2. Sia $f : \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$ la funzione definita induttivamente dalle relazioni:

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1, \quad f(n) = 3f(n-1) + 2f(n-2) \quad \forall\, n \geq 2$$

Dimostrare per induzione che per ogni intero $n \geq 3$ si ha la relazione

$$f(n)f(n-3) - f(n-1)f(n-2) = (-1)^n \cdot 3 \cdot 2^{n-3}$$

Soluzione. Per $n = 3$, otteniamo $f(3) = 3f(2) + 2f(1) = 9 + 2 = 11$, e la relazione diventa $-3 = -3$, un'identità. Supponiamo ora che la relazione sia verificata per ogni intero minore od uguale ad n e dimostriamo che essa è verificata per $n + 1$. Calcoliamo

$$\begin{aligned}
&f(n+1)f(n-2) - f(n)f(n-1) = \\
&= f(n-2)\,(3f(n) + 2f(n-1)) - f(n)\,(3f(n-2 + 2f(n-3)) = \\
&= -2\,(f(n)f(n-3) - f(n-1)f(n-2))
\end{aligned}$$

Applicando l'ipotesi induttiva questo è uguale a

$$-2\left((-1)^n \cdot 3 \cdot 2^{n-3}\right) = (-1)^{n+1} \cdot 3 \cdot 2^{n-2}$$

il che termina la dimostrazione.

3. Consideriamo i reticoli $\Lambda_1 = P(\{a, b, c\})$, $\Lambda_2 = d_{30}$ (reticolo dei divisori di 30), $\Lambda_3 = d_{24}$.

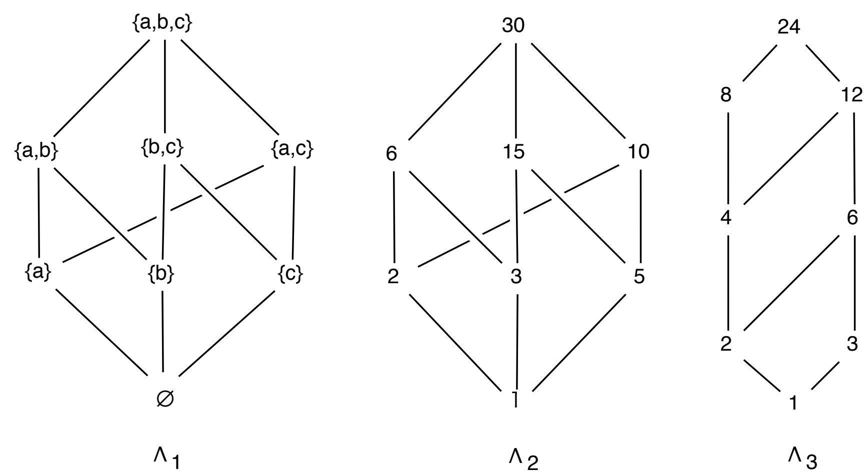
   (a) Disegnare i diagrammi di Hasse dei tre reticoli.

   (b) Stabilire se esistono isomorfismi tra Λ_1 e Λ_2, tra Λ_2 e Λ_3 e tra Λ_1 e Λ_3, rispettivamente. Giustificare.

   (c) Determinare esplicitamente tutti gli isomorfismi di reticoli. Giustificare.

Soluzione

(a)



(b) Confrontando i diagrammi di Hasse si ottiene immediatamente che Λ_3 non è isomorfo ad alcuno dei due reticoli precedenti, mentre Λ_1 è isomorfo a Λ_2.

(c) Utilizzando ancora i diagrammi di Hasse si ottiene che gli isomorfismi possibili sono tutti e soli quelli definiti univocamente dalle formule seguenti:

$$f_i : \Lambda_1 \to \Lambda_2$$

$$f_1(\{a\}) = 2,\ f_1(\{b\}) = 3,\ f_1(\{c\}) = 5$$

$$f_2(\{a\}) = 2,\ f_2(\{b\}) = 5,\ f_2(\{c\}) = 3$$

$$f_3(\{a\}) = 3,\ f_3(\{b\}) = 2,\ f_3(\{c\}) = 5$$

$$f_4(\{a\}) = 3,\ f_4(\{b\}) = 5,\ f_4(\{c\}) = 2$$

$$f_5(\{a\}) = 5,\ f_5(\{b\}) = 2,\ f_5(\{c\}) = 3$$
$$f_6(\{a\}) = 5,\ f_6(\{b\}) = 3,\ f_6(\{c\}) = 2$$

Esistono quindi 6 differenti isomorfismi di reticolo.

4. (a) Determinare se le forme proposizionali seguenti sono tautologie o contraddizioni:
$$(\neg a \wedge (a \to b)) \to \neg a$$
$$(a \vee b) \wedge (a \vee \neg b) \wedge (\neg a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$$
   (b) Scrivere in forma normale disgiuntiva la forma proposizionale seguente:
$$\neg(a \vee b) \vee (a \to c)$$

Soluzione

(a) Risulta evidente dalle tavole di veritá che la prima è una tautologia (sempre vera) e la seconda una contraddizione (sempre falsa).

(b) Se indichiamo con il segno = due espressioni logicamente equivalenti otteniamo che:
$$\neg(a \vee b) \vee (a \to c) = (\neg a \wedge \neg b) \vee (\neg a \vee c) = \neg a \vee c.$$