1. Determinare la tavola della verità di ciascuna delle seguenti forme proposizionali:
   (a) $p \to (\neg q \vee r)$; (b) $\neg p \to (q \to r)$; (c) $(p \to q) \vee (\neg p \to r)$;
   (d) $(p \to q) \wedge (\neg p \to r)$; (e) $(p \leftrightarrow q) \vee (\neg q \leftrightarrow r)$; (f) $(\neg p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$;
   (g) $((p \to q) \to r) \to s$; (h) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (r \leftrightarrow s)$.

2. Verificare le seguenti equivalenze logiche di forme proposizionali.
   (a) $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$, $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$, $(p \wedge q) \vee \neg q \Leftrightarrow p \vee \neg q$, $(p \vee q) \wedge \neg q \Leftrightarrow p \wedge \neg q$ (leggi di assorbimento);
   (b) $\neg(p \oplus q) \Leftrightarrow p \leftrightarrow q$;
   (c) $\neg(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow \neg p \leftrightarrow q$.

3. Determinare quali tra le seguenti forme proposizionali sono tautologie e quali sono contraddizioni.
   (a) $(\neg p \wedge (p \vee q)) \to q$; (b) $(\neg p \wedge (p \to q)) \to \neg p$; (c) $(\neg q \wedge (p \to q)) \to \neg p$;
   (d) $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$; (e) $((p \to q) \to r) \to ((r \to p) \to (s \to p))$

4. Stabilire se le seguenti forme proposizionali $(p \to q) \to r$ e $p \to (q \to r)$ sono equivalenti.

5. Dimostrare che se p e $p \to q$ sono tautologie allora q è una tautologia.

6. Scrivere tutti i 16 connettivi di due proposizioni come combinazione di $\neg$, $\vee$ e $\wedge$.

7. Scrivere forme normali disgiuntive logicamente equivalenti alle seguenti forme proposizionali
   (a) $(p \vee q) \vee (p \to q)$; (b) $\neg(p \vee r) \vee (p \to q)$; (c) $(p \wedge \neg q) \leftrightarrow (q \vee p)$;
   (d) $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)$; (e) $\neg p \vee (q \to \neg r)$.

8. Si ricordi che la *Freccia di Peirce* $p \downarrow q$ è logicamente equivalente a $\neg(p \vee q)$.
   (a) mostrare che $p \downarrow p \Leftrightarrow \neg p$;
   (b) mostrare che $(p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q) \Leftrightarrow p \vee q$;
   (c) concludere che $\{\downarrow\}$ è un sistema completo di connettivi logici;
   (d) trovare una forma proposizionale solo in $\downarrow$ logicamente equivalente a $p \wedge \neg q$

9. Riscrivere ciascuna delle seguenti proposizioni in modo tale che le negazioni siano poste solo davanti ai predicati (cioè non ci devono essere negazioni davanti a un quantificatore a davanti a un'espressione che comprenda connettivi logici)
   (a) $\neg\exists y \exists x P(x, y)$; (b) $\neg\forall x \exists y P(x, y)$; (c) $\neg\exists y(Q(y) \wedge \forall x \neg R(x, y))$;
   (d) $\neg\exists y(\exists x R(x, y) \vee \forall x S(x, y))$; (e) $\neg\exists y(\forall x \exists z T(x, y, z) \vee \exists x \forall z U(x, y, z))$;
   (f) $\neg(\exists x \exists y \neg P(x, y) \wedge \forall x \forall y Q(x, y))$; (g) $\neg\forall x(\exists y \forall z P(x, y, z) \wedge \exists z \forall y P(x, y, z))$

10. (a) Sia $S \subset \mathbf{R}$. Usando i quantificatori, esprimere il fatto che $x = sup(S)$;
   (b) Usando i quantificatori, esprimere che $y \neq sup(S)$;
   (c) Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ e sia $x_0 \in \mathbf{R}$. Usando i quantificatori esprimere il fatto che $\lim_{x \to x_0} f(x)$ esiste;
   (d) Usando i qantificatori esprimere il fatto che $\lim_{x \to x_0} f(x)$ non esiste;
   (e) Sia $\lambda \in \mathbf{R}$. Usando i quantificatori esprimere il fatto che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda$;
   (f) Usando i quantificatori esprimere il fatto che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge;
   (g) Esprimere il fatto che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ non converge;
   (h) Sia $\sigma \in \mathbf{R}$. Usando i quantificatori, esprimere il fatto che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sigma$;
   (i) Usando i quantificatori esprimere il fatto che $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ sono vettori linearmente indipendenti.