1. Stabilire se esiste l'inverso di a modulo n e, in caso affermativo, determinarlo, dove:
   (a) $a = 11$ e $n = 13$; (c) $a = 21$ e $n = 6$; (e) $a = -8$ e $n = 15$;
   (b) $a = 6$ e $n = 21$; (d) $a = 27$ e $n = 36$; (f) $a = 144$ e $n = 233$.

2. Stabilire se per le seguenti congruenze esistono soluzioni intere $x \in \mathbf{Z}$. In caso affermativo, determinarle tutte.
   (a) $5x \equiv 8 \pmod{17}$; (b) $9x \equiv 26 \pmod{30}$; (c) $9x \equiv 24 \pmod{30}$.

3. Stabilire se per i seguenti sistemi di congruenze esistono soluzioni intere $x \in \mathbf{Z}$. In caso affermativo, determinarle tutte.

(a) $$\begin{cases} x \equiv 4 \pmod{8}, \\ x \equiv 3 \pmod{5}, \\ x \equiv 4 \pmod{9}; \end{cases}$$

(c) $$\begin{cases} 9x \equiv 20 \pmod{8}, \\ x \equiv -2 \pmod{5}, \\ -8x \equiv 4 \pmod{9}; \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} 5x \equiv 4 \pmod{8}, \\ 3x \equiv 3 \pmod{5}, \\ 2x \equiv 4 \pmod{9}; \end{cases}$$

(d) $$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{8}, \\ x \equiv 1 \pmod{4}; \end{cases}$$

4. Determinare il resto della divisione per 5 di $33213454^{27221447}$. Determinare il resto della divisione per 7 di $19^{19^{19}}$.

5. (a) Determinare il resto delle divisioni per 5, per 7 e per 11 di 3^{302}; determinare il resto della divisione per 385 di 3^{302} (si noti che $385 = 5 \cdot 7 \cdot 11$.)
   (b) Determinare il resto delle divisioni per 7, per 11 e per 13 di 5^{2003}; determinare il resto della divisione per 1001 di 5^{2003} (si noti che $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$.)

7. (a) Determinare un inverso modulo 37 di 13^{35}; determinare un inverso modulo 37 di 35^{15}.
   (b) Determinare un inverso modulo 55 di 41^{38}; determinare un inverso modulo 55 di 53^{8}.

8. Andare al sito `http://mr-31238.mr.valuehost.co.uk/assets/Flash/psychic.swf`. Spiegare come mai la sfera magica riesce a sempre indovinare il simbolo giusto.

9. (a) Sia p un primo e sia $a \in \mathbf{Z}$. Dimostrare che
$$a^{k(p-1)+1} \equiv a \pmod{p}$$
per ogni intero $k \geq 0$.
   (b) Provare che $a^{13} - a$ è divisibile per 2730 per ogni $a \in \mathbf{Z}$.

10 Dimostrare: ogni numero n tale che $\mathrm{mcd}(n, 10) = 1$ divide un intero non nullo che ha tutte le cifre uguali. Per esempio: 219 divide 33333333.

11. Dimostrare: per ogni primo $p > 5$, l'espansione decimale di $1/p$ è periodica con periodo un divisore di $p - 1$. Calcolare il periodo di $1/83$.