1. Dimostrare per induzione che $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ per ogni intero $n \geq 1$.
2. Dimostrare per induzione che la somma dei cubi dei primi n numeri pari è uguale a $2n^2(n+1)^2$.
3. (a) Dimostrare per induzione che, per ogni $n \in \mathbf{N}$, risulta $\sum_{i=0}^{n}(4i+1) = (2n+1)(n+1)$.
   (b) Determinare $\sum_{i=0}^{n}(4i+2)$ per ogni $n \in \mathbf{N}$.
4. (i) Dimostrare per induzione che $3^n < n!$ per ogni $n \geq 7$.
   (ii) Trovare $m \in \mathbf{N}$ tale che $4^m < m!$. Dimostrare per induzione che $4^n < n!$ per ogni $n \geq m$.
5. Per quali numeri naturali n si ha che $n! \geq n^2$? Dimostrare per induzione la risposta data.
6. Sia F_k il k-esimo numero di Fibonacci.
   (i) Dimostrare che $F_1^2 + \ldots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$ per ogni $n \geq 1$.
   (ii) Dimostrare per induzione che, per ogni $n \geq 1$, risulta che $\mathrm{mcd}(F_n, F_{n+1}) = 1$.
   (iii) Dimostrare che $F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$ per ogni $n \geq 1$.
7. Per $n \in \mathbf{N}$ definiamo ricorsivamente la funzione g da $g(1) = 2$, da $g(2) = 5$ e da $g(n) = g(n-2) - g(n-1)$ per $n \geq 2$. Calcolare $g(5)$.
8. Siano A, B e C tre sottoinsiemi di X. Dimostrare
   (a) $A \cup B \subset A \cup B \cup C$;
   (b) $(A - B) - C \subset A - C$;
   (c) $(A - C) \cap (C - B) = \emptyset$;
   (d) $(B - A) \cup (C - A) = (B \cup C) - A$.
9. Siano $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $C = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Determinare gli elementi di:
   (a) $A \cap B \cap C$;
   (b) $(A \cup B) \cap C$;
   (c) $A \cup (B \cap C)$;
   (d) $(A - B) - C$;
   (e) $A - (B - C)$;
   (f) $A \cap (B - C)$.
10. (a) Per ogni $n \in \mathbf{N}$ sia $A_n = \{m \in \mathbf{N} : m \leq n\}$. Determinare $A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7$ e determinare $A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7$.
    (b) Per ogni $n \in \mathbf{N}$ sia $B_n = \{m \in \mathbf{Z} :$ esiste un $k \in \mathbf{Z}$ tale che $m = kn\}$. Determinare $B_4 \cap B_5 \cap B_6$.
11. (a) Determinare $\mathcal{P}(\emptyset)$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$.
    (b) Determinare $\mathcal{P}(\{0\})$ e $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{0\}))$.
12. (a) Determinare $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$. (b) Determinare $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$.
13. Se esiste, costruire una biezione $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$.
14. Costruire una funzione $f : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{Z}$ tale che
    (a) f è una iniezione ma non una suriezione.
    (b) f è una suriezione ma non una iniezione.
15. Se esiste, costruire una biezione fra i seguenti insiemi.
    (a) $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{7, 8, 10\}$;
    (b) $A = \{0, 1\}$ e $B = \{1\}$;
    (c) $\mathbf{Z}$ e $\{x \in \mathbf{Z} : x$ è dispari$\}$;
    (d) $\mathbf{R}$ e $\mathbf{R} - \{0\}$.
16. (a) Siano A, B due insiemi numerabili. Dimostrare che gli insiemi $A \cup B$ e $A \times B$ sono numerabili.
    (b) Per $k = 1, 2, 3, \ldots$ siano A_k insiemi numerabili. Dimostrare che $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ è numerabile.