1. Sia t un numero reale > -1. Dimostrare per induzione che $(1+tn) \leq (1+t)^n$ per ogni $n \in \mathbf{N}$.

Per $n-1$ l'affermazione è vera perchè $1+t \leq 1+t$. Supponiamo che sia vera per n. Allora $(1+t)^{n+1} = (1+t)(1+t)^n \geq (1+t)(1+nt) = 1+(n+1)t+nt^2 \geq 1+(n+1)t$, dove la prima disuguaglianza segue dall'ipotesi induttiva e dal fatto che $t \geq -1$ e la seconda segue dal fatto che $nt^2 \geq 0$. L'affermazione è quindi vera per $n+1$.

2. Sia $X = \{(a,b) \in \mathbf{R}^2 \ : a \neq b \text{ e } a \neq -b\}$. Sia $R \subset X \times X$ la relazione

$$R = \{((a,b),(a',b')) \in X \times X \ : \ (a-b)(a'-b') > 0 \text{ e } (a+b)(a'+b') > 0\}$$

(a) Dimostrare che R è una relazione di equivalenza.
(b) Determinare quante sono le classi di equivalenza e descriverle.

(a) La relazione è riflessiva. Infatti se $(a,b) \in X$ si ha che $a \neq b, -b$. Quindi $(a-b) > 0$ e $(a+b) > 0$. La relazione è simmetrica: se $(a-b)(a'-b') > 0$ e $(a+b)(a'+b') > 0$ allora $(a'-b')(a-b) > 0$ e $(a'+b')(a+b) > 0$. La relazione è transitiva: osservando che il prodotto di due numeri (diversi da zero) è positivo se e solo se hanno lo stesso segno, se $(a-b)$ ha lo stesso segno di $(a'-b')$ e $(a'-b')$ ha lo stesso segno di $(a''-b'')$ allora $(a-b)$ ha lo stesso segno di $(a''-b'')$.
(b) Le classi di equivalenza sono quattro: $\{(a,b) \in X : a-b > 0 \text{e} a+b > 0\}$, $\{(a,b) \in X : a-b > 0 \text{e} a+b < 0\}$, $\{(a,b) \in X \ : \ a-b < 0 \text{ e } a+b > 0\}$, $\{(a,b) \in X \ : \ a-b < 0 \text{ e } a+b < 0\}$. Si noti che sono i quattro "spicchi" in cui il piano è diviso dalle due rette di equazioni $a = b$ e $a = -b$.

3. Sia $X = \{0,1,2\} \times \mathbf{N}$. Esibire, se esiste, una funzione $f : X \to \mathbf{N}$ biettiva.

Innanzitutto osserviamo che X, essendo il prodotto cartesiano di un insieme finito per uno numerabile, è numerabile. Quindi una funzione biettiva come richiesto esiste sicuramente. Ad esempio $f : X \to \mathbf{N}$ così definita: $f((i,n)) = 3n+i$ è biettiva. Per dimostrarlo si può, ad esempio, dimostrare che f è invertibile. Infatti la funzione $g : \mathbf{N} \to X$ così definita:

$$g(n) = \begin{cases} (0, n/3) & \text{se } n \equiv 0 \ (mod\, 3) \\ (1, n-1/3) & \text{se } n \equiv 1 \ (mod\, 3) \\ (2, n-2/3) & \text{se } n \equiv 2 \ (mod\, 3) \end{cases}$$

è l'inversa di f, come si verifica facilmente.

4. Stabilire se esistono numeri $x \in \mathbf{Z}$ tali che $4x \equiv 62 \pmod{90}$ e, in caso affermativo, determinarli tutti.

Si osservi innanzitutto che, poichè $gcd(4,90) = 2$ e 2 divide 46, la soluzione esiste ed è unica mod $45 (= 90/2)$. La congruenza in questione è equivalente a $2x \equiv 23 \pmod{45}$. Si vede facilmente che $x = 34$ è una soluzione. Quindi le soluzioni sono tutti e soli i numeri della forma $34 + 45n$, con $n \in \mathbf{Z}$.

5. Determinare il resto della divisione per 55 del numero 3^{322}.

Essendo 55 il prodotto dei due numeri primi $p = 5$ e $q = 11$, sappiamo, da una variante del Teorema di Fermat, che, se r è il resto della divisione dell'esponente 322 per $40 (= (p-1)(q-1))$, allora $3^{322} \equiv 3^r \pmod{55}$. Poichè $r = 2$ si ha che $3^{322} \equiv 3^2 = 9 \,\text{mod}\, 55$. Il resto cercato è quindi 9. Si può pervenire allo stesso risultato applicando il Teorema Cinese dei Resti.

6. Sia B un'algebra di Boole. Per $x, y \in B$ definiamo $x \oplus y = xy' + x'y$. Dimostrare la seguente uguaglianza o darne un controesempio: $z \oplus (y+x) = (z \oplus y) + (z \oplus x)$.

L'uguaglianza non è vera: infatti, ad esempio, per $x = 1$, $y = 0$ e $z = 1$ si ha che $z \oplus (y+x) = 0$ mentre $(z \oplus y) + (z \oplus x) = 1$. A tale controesempio si può pervenire scrivendo le due espressioni come somme di prodotti completate, oppure esaminando direttamente le tabelle della verità.