GEOMETRIA e ALGEBRA (Schoof) 2^o esonero Colleferro, 1 dicembre 2006, ore 14:00–16:00.

COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 7.5 punti.

1. Sia S la riflessione rispetto alla retta r di $\mathbf{R}^2$ di equazione cartesiana $x_1 - \sqrt{3}x_2 = 0$ ed S' la riflessione rispetto alla retta s di equazione parametrica $\mathbf{x} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(t \in \mathbf{R})$.
   (a) Calcolare le formule per S e per S'
   (b) Calcolare le formule per $S \circ S'$.

(a) L'applicazione S è lineare ed è quindi data dalla moltiplicazione per una certa matrice A. Osserviamo che il vettore $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ è contenuto nella retta r ed è quindi autovettore di autovalore $\lambda = 1$. Similmente, il vettore $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ è perpendicolare alla retta r ed è quindi autovettore di autovalore $\lambda = -1$. La matrice rappresentativa di S rispetto alla base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ e quindi data da $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. La matrice A cercata è la matrice rappresentativa di S rispetto alla base canonica. Sia $B = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ la matrice del cambiamento di base dalla base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ alla base canonica. Allora si ha che

$$A = B\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}B^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Similmente, l'applicazione S' è data dalla moltiplicazione per una certa matrice A'. Autovettori della applicazione S' sono $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ di autovalore $\lambda = 1$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ di autovalore $\lambda = -1$. Usando lo stesso metodo si trova che la matrice A' è uguale a $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) L'applicazione $S \circ S'$ è data dalla moltiplicazione per il prodotto delle due matrici A e A' che abbiamo calcolato per S e S'. Abbiamo quindi che

$$S \circ S'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

2. Sia r la retta in $\mathbf{R}^3$ di equazione parametrica $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(t \in \mathbf{R})$ e sia m la retta in $\mathbf{R}^3$ di equazione parametrica $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(s \in \mathbf{R})$. Calcolare la distanza fra r ed m.

Siccome il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ è perpendicolare alle due rette r ed m, un'equazione cartesiana per il piano π passante per la retta r e parallelo alla retta m è data da $x + 2y + z + 1 = 0$. La distanza tra le rette r ed m è uguale alla distanza di un qualsiasi punto di m dal piano π. Prendiamo il punto $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ di m e troviamo che la distanza cercata è uguale a

$$\frac{|1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{6}}.$$

3. Siano $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e sia $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione data da $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-z \\ z-x \\ x-y \end{pmatrix}$.

(a) Dimostrare che f è lineare.

(b) Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ (nello spazio di partenza e in quello di arrivo).

(a) Dalla uguaglianza

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

segue che f è data dalla moltiplicazione per la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Ecco perché f è lineare. (b) La matrice del cambiamento di base dalla base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ alla base canonica è data da $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice cercata è uguale a

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Sia $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calcolare A^{1000}.

Autovettori della matrice A sono il vettore $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ di autovalore $\lambda = 2$ e il vettore $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ di autovalore $\lambda = -3$. La matrice del cambiamento di base dalla base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ alla base canonica è quindi uguale a $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ e la matrice cercata è uguale a

$$B\begin{pmatrix} 2^{1000} & 0 \\ 0 & (-3)^{1000} \end{pmatrix} B^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2^{1000} + 4 \cdot 3^{1000} & 4 \cdot 2^{1000} - 4 \cdot 3^{1000} \\ 2^{1000} - 3^{1000} & 4 \cdot 2^{1000} + 3^{1000} \end{pmatrix}.$$