GEOMETRIA e ALGEBRA (Schoof) 1^o esonero Colleferro, 30 ottobre 2006, ore 14:00–16:00.

COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 7.5 punti.

1. Sia $g : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ l'applicazione data da $g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y-z \\ -2x-2y+2z \end{pmatrix}$. Calcolare una base di $\ker(g)$ e una base di $\mathrm{im}(g)$.

Questo esercizio è esercizio 5 del foglio 5 che è stato messo in rete.

Il nucleo di g consiste dei vettori $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ che soddisfanno $x+y-z=0$. Usando il metodo di Gauss scriviamo questo sottospazio nella forma 'span'. Troviamo che $\ker(g)$ è uguale a $\mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ e che una base di $\ker(g)$ è data da $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

L'immagine di g è uguale a $\mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\}$. Una base è data dal vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

2. Sia R la rotazione di angolo di $+45$ gradi di centro $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Sia r la retta di equazione $x+2y=1$. Determinare un'equazione cartesiana della retta che si ottiene applicando R ad r.

Siano $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ due punti sulla retta r. Per applicare R, trasliamo A e B di passo $\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ a troviamo i punti $A' = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ e $B' = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Poi ruotiamo A' e B' intorno all'origine di un angolo di+45 gradi. A questo scopo moltiplichiamo A' e B' per la matrice $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$ e troviamo i punti $A'' = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix}$ e $B'' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{5}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$. In fine trasliamo i punti A'' e B'' di passo $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e otteniamo i punti $A'' = \begin{pmatrix} \sqrt{2}+2 \\ -2\sqrt{2}+3 \end{pmatrix}$ e $B'' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2}+2 \\ -\frac{5}{2}\sqrt{2}+3 \end{pmatrix}$. La retta che passa per A'' e B'' è la retta cercata. Un'equazione parametrica è data da $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}+2 \\ -2\sqrt{2}+3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} \frac{3}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $(t \in \mathbf{R})$. Eliminando il parametro t troviamo l'equazione cartesiana $x - 3y = 7\sqrt{2} - 7$.

3. Sia $U = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : x_1 + x_2 = 0\}$ e siano

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare una base dello spazio vettoriale U.
(b) Completare la base trovata in (a) ad una base di $\mathbf{R}^3$.
(c) Determinare quali fra gli insiemi di vettori $\{\mathbf{x}, \mathbf{u}\}$, $\{\mathbf{x}, \mathbf{v}\}$, $\{\mathbf{x}, \mathbf{w}\}$ sono basi di U. Motivare bene le risposte.

(a) Risolvendo il 'sistema lineare' $x_1 + x_2 = 0$ con il metodo di Gauss troviamo che $U = \text{span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$ e vediamo che i vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ formano una base di U.

(b) Possiamo completare i due vettori della parte (a) ad una base di $\mathbf{R}^3$, aggiungendo (per esempio) il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(c) I vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{w}$ sono proporzionali e quindi dipendenti. Non possono formare una base di uno spazio vettoriale. Il vettore $\mathbf{v}$ non è contenuto in U e quindi i vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{v}$ non possono formare una base di U. In fine, i vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{u}$ sono indipendenti e stanno in U. Formano una base di U perché U ha dimensione 2.

4. Siano dati i sottospazi $U = \text{span}\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$ e $V = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 : x_2 + x_3 = 0\}$ di $\mathbf{R}^4$.

(a) Determinare una base del sottospazio $U \cap V$ e calcolare $\dim(U \cap V)$.
(b) Calcolare $\dim(U + V)$.
(c) Determinare se U è contenuto in V. Spiegare la risposta.

(a) Scriviamo U come spazio di soluzioni del sistema lineare $\begin{cases} x_1 & = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 & = 0 \end{cases}$. Per calcolare $U \cap V$ risolviamo il sistema lineare omogeno corrisponedente alla matrice associata

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Con il metodo di Gauss si trova che le soluzioni sono $t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $(t \in \mathbf{R})$. Il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ è quindi una base di $U \cap V$. Vediamo che la dimensione di $U \cap V$ è uguale a 1.

(b) Siccome $\dim(U) = 2$ e $\dim(V) = 3$, per la formula di Grassmann la dimensione di $U + V$ è uguale a $3 + 2 - 1 = 4$.

(c) Il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sta in U, ma non in V. Il sottospazio U non è quindi contenuto in V.