1. Sia π il piano di equazione $-x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 1 = 0$ e siano $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Calcolare un'equazione cartesiana del piano π_1 passante per $\mathbf{p}$ e parallelo a π.
   (b) Calcolare un'equazione parametrica della retta r passante per $\mathbf{q}$ e ortogonale π_1.
   (c) Calcolare un'equazione parametrica della retta ℓ passante per $\mathbf{p}$ e ortogonale π.
   (d) Determinare $r \cap \ell$. Calcolare la distanza $d(r, \ell)$.
2. Sia S la sfera di equazione $(x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 + (x_3 - 2)^2 = 9$. Siano π il piano di equazione $-2x_1 + x_3 + 1 = 0$ e π_1 quello di equazione $x_1 = 1$.
   (a) Calcolare la distanza fra π e il centro di S e la distanza fra π_1 e il centro di S
   (b) Se l'intersezione fra π e S è una circonferenza calcolarne il raggio. Fare la stessa cosa per π_1.
3. Date le rette r_1, r_2, r_3 di equazioni parametriche
$$r_1 : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad r_2 : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad r_3 : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$
   (a) Determinare i punti d'intersezione: $\{P\} = r_1 \cap r_2$; $\{Q\} = r_2 \cap r_3$; $\{R\} = r_3 \cap r_1$
   (b) Scrivere un'equazione parametrica del piano passante per P, Q ed R.
   (c) Scrivere un'equazione cartesiana del piano passante per P, Q ed R.
4. Sia S la sfera di equazione $x_1^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 + 1)^2 = 4$ ed r la retta di equazione cartesiana:
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4 = 0, \\ -x_1 + x_3 + 1 = 0. \end{cases}$$
   (a) Determinare i punti d'intersezione P e Q di S con r.
   (b) Scrivere l'equazione del piano π_1 tangente alla sfera in P.
   (c) Scrivere l'equazione del piano π_2 tangente alla sfera in Q.
   (d) Scrivere un'equazione parametrica della retta r intersezione di π_1 e π_2.
5. Calcolare gli autovalori $\lambda \in \mathbf{R}$ delle seguenti matrici. Determinare gli autospazi corrispondenti.
$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{(c)} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(d)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$
6. Calcolare il polinomio caratteristico della matrice della tavola pitagorica:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 & 18 & 20 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 18 & 21 & 24 & 27 & 30 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 24 & 28 & 32 & 36 & 40 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 25 & 30 & 35 & 40 & 45 & 50 \\ 6 & 12 & 18 & 24 & 30 & 36 & 42 & 48 & 54 & 60 \\ 7 & 14 & 21 & 28 & 35 & 42 & 49 & 56 & 63 & 70 \\ 8 & 16 & 24 & 32 & 40 & 48 & 56 & 64 & 72 & 80 \\ 9 & 18 & 27 & 36 & 45 & 54 & 63 & 72 & 81 & 90 \\ 10 & 20 & 30 & 40 & 50 & 60 & 70 & 80 & 90 & 100 \end{pmatrix}$$