Corso di Geometria 5. Complementi, nuclei, immagini; trasformazioni di $\mathbf{R}^2$ Roma, 24 ottobre 2006.

1. Siano
$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3;$$
   (a) Far vedere che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ sono vettori indipendenti.
   (b) Completarli ad una base di $\mathbf{R}^3$.
   (c) Esibire un complemento di $\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1\}$ in $\mathbf{R}^3$ e di $\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ in $\mathbf{R}^3$.

2. Esibire un complemento del sottospazio $W \subset \mathbf{R}^4$ dato da
$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 : \begin{cases} x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_4 &= 0 \end{cases} \}.$$

3. Sia Ω l'esagono i cui vertici sono i punti di $\mathbf{R}^2$ di coordinate
$$\mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{q}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}, \mathbf{q}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}, \mathbf{q}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{q}_5 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}, \mathbf{q}_6 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$
   (a) Per quali angoli φ la rotazione di centro l'origine e angolo φ manda l'esagono in se stesso?
   (b) Per quali rette r passanti per l'origine la riflessione rispetto ad r manda l'esagono in se stesso?

4. Sia S la riflessione rispetto alla retta r di $\mathbf{R}^2$ di equazione cartesiana $x_1 - \sqrt{3}x_2 = 0$ ed S' la riflessione rispetto alla retta s di equazione parametrica $\mathbf{x} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(t \in \mathbf{R})$.
   (a) Calcolare le formule per S, S' e per $S \circ S'$ e $S' \circ S$.
   (b) Geometricamente, cosa fanno $S \circ S'$ e $S' \circ S$?

5. Sia $g : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ l'applicazione data da $g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y - z \\ -2x - 2y + 2z \end{pmatrix}$. Calcolare una base per $\ker(g)$ e una base per $\mathrm{im}(g)$.

6. Sia $V = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ e sia $W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in V : x_2 = x_4\}$.
   (a) Determinare la dimensione di W.
   (b) Esibire un complemento W' di W in $\mathbf{R}^4$.
   (c) Dimostrare che per ogni complemento W' si ha che $\dim(V \cap W') = 1$.

7. Sia $f : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ l'applicazione data da $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.
   (a) Calcolare $W = \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)$.
   (b) Esibire un complemento di W *in* $\ker(f)$.