

1. Siano $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ e $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Calcolare il coseno dell'angolo φ fra i vettori
 - (a) \mathbf{x} e \mathbf{y} ; (b) $-\mathbf{x}$ e \mathbf{y} ; (c) \mathbf{x} e $-\mathbf{y}$; (d) $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ e $\mathbf{x} + \mathbf{y}$.
2. Sia $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$. In ognuno dei seguenti casi determinare un vettore $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^2$ tale che:
 - (a) \mathbf{y} è perpendicolare a \mathbf{x} e $\|\mathbf{y}\| = 3$; (c) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$;
 - (b) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = -2$ e $\|\mathbf{y}\| = 2$; (d) $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = 0$.
3. Trovare, se esistono, vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^2$ non nulli tali che
 - (a) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$; (b) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| + 2\|\mathbf{y}\|$; (c) $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|$.
4. Siano $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Calcolare:
 - (a) l'area del triangolo di vertici $\mathbf{0}$, \mathbf{x} e \mathbf{y} ;
 - (b) l'area del parallelogramma di vertici $\mathbf{0}$, $-\mathbf{x}$, $-\mathbf{y}$ e $-\mathbf{x} - \mathbf{y}$;
 - (c) l'area del parallelogramma di vertici $\mathbf{0}$, $-\mathbf{x}$, \mathbf{y} e $\mathbf{y} - \mathbf{x}$.
5. Siano ℓ_1, ℓ_2 ed ℓ_3 le tre rette di equazioni cartesiane

$$\ell_1 : x_1 - 2x_2 + 3 = 0; \quad \ell_2 : 3x_1 + x_2 - 1 = 0; \quad \ell_3 : -2x_1 + 5x_2 + 1 = 0.$$

- (a) Trovare i punti d'intersezione $P_1 = \ell_2 \cap \ell_3$, $P_2 = \ell_1 \cap \ell_3$, $P_3 = \ell_1 \cap \ell_2$.
 - (b) Calcolare un'equazione parametrica per la retta s_i perpendicolare a ℓ_i e passante per P_i , per $i = 1, 2, 3$.
 - (c) Determinare $s_i \cap s_j$ per $i, j = 1, 2, 3$.
6. Sia C_1 la circonferenza di raggio $\sqrt{5}$ centrata in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e C_2 la circonferenza di equazione

$$x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 - 4x_2 + 4 = 0.$$
 - (a) Calcolare l'intersezione $C_1 \cap C_2$. Fare un disegno.
 - (b) Se l'intersezione consiste di due punti P_1 e P_2 scrivere l'equazione cartesiana della retta ℓ congiungente P_1 e P_2 e l'equazione parametrica della retta m perpendicolare ad ℓ e passante per il centro di C_1 .
 - (c) Esiste una retta parallela ad ℓ che sia tangente a C_1 ? In caso affermativo scriverne un'equazione.
 - (d) Esiste una retta parallela ad m che sia tangente a C_2 ? In caso affermativo scriverne un'equazione.
7. Sia C la circonferenza di raggio $\sqrt{2}$ centrata in $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
 - (a) Calcolare le tangenti a C uscenti dai punti $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
 - (b) Sia $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Trovare il punto Q di C più vicino a P ; trovare il punto R di C più lontano da P .
 - (c) Calcolare la distanza fra Q ed R .