GEOMETRIA e ALGEBRA (Schoof) 2^o appello Colleferro, 7 dicembre 2006, ore 14:00–16:00.

COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 7.5 punti.

1. Siano V e W due spazi vettoriali.
   (a) Dare la definizone di applicazione lineare $f : V \longrightarrow W$.
   (b) Sia $f : V \longrightarrow W$ lineare. Definire il nucleo di f e l'immagine di f.
   (c) Dare un esempio di un'applicazione lineare f che ha la proprietà che gli spazi vettoriali $\ker(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ hanno dimensione 1.

   (a), (b) Per le definizioni di 'applicazione lineare', 'nucleo' ed 'immagine', si vedano le dispense di algebra lineare.
   (c) Un esempio di applicazione lineare con le proprietà richieste è l'applicazione $g : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ data da $g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x$.

2. Sia S la riflessione rispetto alla retta r di $\mathbf{R}^2$ di equazione cartesiana $x_1 - \sqrt{3}x_2 = 0$ ed S' la riflessione rispetto alla retta s di equazione parametrica $\mathbf{x} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(t \in \mathbf{R})$.
   (a) Calcolare le formule per S e per S'
   (b) Calcolare le formule per $S \circ S'$.

   Questo è il primo esercizio del compito precedente (1^o appello e 2^o esonero 1 dicembre 2006).

3. Sia π il piano in $\mathbf{R}^3$ di equazione cartesiana $x + 2y + 3z = 7$. Sia S la sfera data dall'equazione $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4^2$.
   (a) Calcolare la distanza del piano π dal centro della sfera S.
   (b) L'intersezione $\pi \cap S$ è una circonferenza. Calcolarne il raggio.

   (a) La distanza richiesta è uguale a

$$d = \frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 - 7|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \sqrt{\frac{7}{2}}.$$

   (b) Sia r il raggio della circonferenza. Siccome il raggio della sfera è uguale a 4, il Teorema di Pitagora implica che $d^2 + r^2 = 4^2$ e quindi $r = \sqrt{4^2 - \frac{7}{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$.

4. Sia $W \subset \mathbf{R}^3$ un piano passante per l'origine. Sia $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ la riflessione rispetto al piano W. Calcolare la traccia di f.

   La traccia di f è la traccia della matrice rappresentativa di f rispetto ad una qualsiasi base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ di $\mathbf{R}^3$. Per $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ prendiamo due vettori indipendenti in W. Il terzo vettore $\mathbf{v}_3$ lo prendiamo *perpendicolare* a W. Abbiamo adesso che $f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1$ e $f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_2$ mentre $f(\mathbf{v}_3) = -\mathbf{v}_3$. La matrice rappresentativa di f rispetto alla base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ è quindi data da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   La traccia di f è uguale a $\mathrm{Tr}(A) = 1 + 1 - 1 = 1$.