GEOMETRIA e ALGEBRA (Schoof) 2^o Esonero Colleferro, 30 novembre 2005, ore 14:00–16:00.

COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 7.5 punti.

1. Calcolare la matrice inversa della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Usando il metodo spiegato in classe, si calcola che la matrice inversa è

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 3/8 & -1/8 \\ 1/4 & -1/8 & 3/8 \\ -3/4 & 3/8 & -1/8 \end{pmatrix}.$$

2. Sia $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ l'applicazione data da $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x+2y \\ 2x+2y \end{pmatrix}$.
   (a) Trovare una base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ di autovettori di f.
   (b) Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$.

Questo è l'esercizio 4 dell'8^o foglio.
(a) Il polinomio caratteristico è $(\lambda-5)(\lambda-2)-2\cdot 2 = \lambda_2 - 7\lambda + 6$. Gli zeri sono gli autovalori e sono uguali a 1 e a 6. L'autospazio di autovalore $\lambda = 6$ consiste nello spazio delle soluzioni del sistema lineare $\begin{cases} -x+2y &= 0 \\ 2x-4y &= 0 \end{cases}$ ed è quindi uguale allo span del vettore $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Similmente lo span di $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ è l'autospazio di autovalore $\lambda = 1$. Gli autovettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono indipendenti e formano quindi una base di $\mathbf{R}^2$.
(b) Siccome abbiamo che $f(\mathbf{v}_1) = 6 \cdot \mathbf{v}_1$ e $f(\mathbf{v}_2) = 1 \cdot \mathbf{v}_2$, la matrice rappresentativa di f rispetto alla base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ è uguale a $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Calcolare il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Usando lo sviluppo di Laplace rispetto alla prima colonna della matrice, troviamo che il determinante richiesto è uguale a

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\cdot\det\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad = \quad -21 + 2\cdot 20 \quad = \quad 19.$$

4. Sia $r \subset \mathbf{R}^3$ la retta di equazione parametrica $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(t \in \mathbf{R})$ e sia r' la retta di equazione parametrica $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $(s \in \mathbf{R})$. Calcolare la distanza fra r ed r'.

Il piano π contenente r e parallelo alla retta r' ammette la seguente equazione parametrica: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $(s, t \in \mathbf{R})$. Usando i metodi spiegati in classe si trova che $x - 2y + z - 1 = 0$ è una equazione parametrica per π. La distanza d cercata è uguale alla distanza del punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (della retta r') dal piano π. Usando la formula spiegata in classe troviamo quindi che

$$d = \frac{|0 - 2\cdot 1 - 1\cdot 1 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{6}}.$$