1. Sia $g : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione data dalla moltiplicazione per $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Sia $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ la base canonica di $\mathbf{R}^3$. Far vedere che i vettori $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$ e $\mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_1$ formano una base per $\mathbf{R}^3$.
   (b) Calcolare la matrice rappresentativa di g rispetto alla base $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ in dominio e codominio.

2. Siano
$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
   vettori in $\mathbf{R}^3$.
   (a) Far vedere che $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ formano una base per $\mathbf{R}^3$.
   Sia $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione che permuta i vettori $\mathbf{v}_i$.
$$f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2, \quad f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_3, \quad f(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1.$$
   (b) Calcolare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.
   (c) Calcolare la matrice rappresentative di f rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$.
   d) Calcolare la matrice rappresentativa di f^3 rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$.

3. Sia
$$V = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \}$$
   e sia $h : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione data da $h \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.
   (a) Dimostrare che $h(\mathbf{x}) \in V$ per ogni $\mathbf{x} \in V$.
   Sia $h_{|V}$ l'applicazione h *ristretta* a V.
   (b) Trovare una base per V.
   (c) Calcolare la matrice rappresentativa della applicazione $h_{|V}$ rispetto a questa base.

4. Sia $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ l'applicazione data da $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x + 2y \\ 2x + 2y \end{pmatrix}$.
   (a) Trovare una base $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ di autovettori di f.
   (b) Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$.

5. Diagonalizzare la matrice
$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{6}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}.$$

6. Calcolare A^{100} per la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$.