1. Calcolare

(a) $\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;   (c) $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$;

(b) $\det\begin{pmatrix} 100 & 73 \\ 137 & 100 \end{pmatrix}$;   (d) $\det\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$ $(\varphi \in \mathbf{R})$.

2. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcolare $\det(A)$ e $\det(B)$.
(b) Calcolare $\det(AB)$, $\det(BA)$ e $\det(A^{-1})$.
(c) Calcolare $\det(A+B)$.

3. Siano $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ i vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcolare il volume del parallelepipedo che ha come spigoli i vettori $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$.
(b) Calcolare il volume del parallelepipedo che ha come spigoli i vettori $2\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$.
(c) Calcolare il volume del parallelepipedo che ha come spigoli i vettori $\mathbf{x}+\mathbf{y}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$.

4. Per ogni $n \geq 1$ calcolare il determinante della matrice $n \times n$ data da

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Calcolare i polinomi caratteristici delle matrici

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

6. Calcolare gli autovalori $\lambda \in \mathbf{R}$ delle seguenti matrici. Determinare gli autospazi corrispondenti.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.