Corso di Geometria ed Algebra 6. Matrici, nucleo, immagine. Colleferro, 8 novembre 2005.

1. Sia $g : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ l'applicazione data da $g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y-z \\ -2x-2y+2z \end{pmatrix}$. Calcolare una base per $\ker(g)$ e una base per $\mathrm{im}(g)$.

2. Sia $V = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ e sia $W = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in V : x_2 = x_4\}$.
   (a) Determinare la dimensione di W.
   (b) Esibire un complemento W' di W in $\mathbf{R}^4$.
   (c) Dimostrare che per ogni complemento W' si ha che $\dim(V \cap W') = 1$.

3. Sia $f : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ l'applicazione data da $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.
   (a) Calcolare $W = \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)$.
   (b) Esibire un complemento di W *in* $\ker(f)$.

4. Sia A la matrice n per n data da

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Sia $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ la moltiplicazione per A. Sia $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ la base canonica di $\mathbf{R}^n$. Far vedere che $f(\mathbf{e}_1) = 0$ e che
$$f(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_{i-1}; \qquad \text{per } i = 2, 3, \ldots, n.$$
   (b) Per $m > 0$, sia f^m l'applicazione $\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{m \text{ volte}}$ e sia $A^m = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{m \text{ volte}}$. Per ogni $m > 0$, calcolare la matrice A^m e determinare il nucleo e l'immagine di f^m.

5. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n. Sia $f : V \longrightarrow V$ un'applicazione lineare con la proprietà che $f^2 = 0$, cioè $f(f(\mathbf{v})) = \mathbf{0}$ per ogni $\mathbf{v} \in V$.
   (a) Dimostrare che $\mathrm{im}(f) \subset \ker(f)$;
   (b) Dimostrare che $\ker\ker(f) \geq n/2$;
   (c) Per $n = 6$ dare un esempio di uno spazio vettoriale V e di un'applicazione lineare come sopra per cui la dimensione di $\ker(f)$ è *uguale* a $n/2 = 3$.

6. Per le seguenti matrici decidere se sono invertibili o meno e, in caso affermativo, calcolarne la matrice inversa:

(a) $\begin{pmatrix} 8 & 15 \\ 7 & 13 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; (d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.