1. Siano
$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3;$$
   (a) Far vedere che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ sono vettori indipendenti.
   (b) Completarli ad una base di $\mathbf{R}^3$.
   (c) Esibire un complemento di $\text{Span}\{\mathbf{v}_1\}$ e di $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$

2. Esibire un complemento del sottospazio $W \subset \mathbf{R}^4$ dato da
$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 : \begin{cases} x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_1 - x_4 & = & 0 \end{cases} \}.$$

3. Sia $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\mathbf{R}^2$.
   (a) Trovare le formule per la rotazione $R_{-\frac{\pi}{2},\mathbf{p}}$ di centro $\mathbf{p}$ ed angolo $-\frac{\pi}{2}$.
   (b) Trovare le formule per la rotazione $R_{\frac{\pi}{4},\mathbf{p}}$ di centro $\mathbf{p}$ ed angolo $\frac{\pi}{4}$
   (c) Sia ℓ la retta di equazione parametrica $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Calcolare un'equazione parametrica della retta che si ottiene applicando $R_{-\frac{\pi}{2},\mathbf{p}}$ ad ℓ.
   (d) Sia m la retta di equazione cartesiana $x_1 + 2x_2 = 3$. Calcolare un'equazione parametrica della retta che si ottiene applicando $R_{\frac{\pi}{4},\mathbf{p}}$ ad m.

4. Sia S la riflessione alla retta ℓ in $\mathbf{R}^2$ di equazione cartesiana $x_1 - \sqrt{3}x_2 = 0$ ed S' la riflessione rispetto alla retta m di equazione parametrica $\mathbf{x} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Calcolare le formule per S ed S'.
   (b) Calcolare le formule per $S \circ S'$ e per $S' \circ S$.
   (c) Geometricamente cosa fanno $S \circ S'$ e $S' \circ S$?
   (d) Esiste un quadrato Q che viene lasciato mandato in se stesso sia da $S \circ S'$ che da $S \circ S'$?

5. Sia S la riflessione rispetto alla retta ℓ in $\mathbf{R}^2$ di equazione $\sqrt{3}x_1 - x_2 = 2$.
   (a) Trovare le formule per S e calcolare $S(\mathbf{p})$ ed $S(\mathbf{q})$ dove $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
   (b) Calcolare $S^2(\mathbf{p}) = S(S(\mathbf{p}))$ e $S^2(\mathbf{q}) = S(S(\mathbf{q}))$. Calcolare $S^3(\mathbf{p}) = S(S(S(\mathbf{p})))$ e $S^3(\mathbf{q}) = S(S(S(\mathbf{q})))$. Calcolare $S^{68}(\mathbf{p})$ e $S^{91}(\mathbf{q})$.

6. Sia Ω l'esagono i cui vertici sono i punti di $\mathbf{R}^2$ di coordinate
$$\mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{q}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}, \mathbf{q}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}, \mathbf{q}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{q}_5 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}, \mathbf{q}_6 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$
   (a) Per quali angoli ϕ la rotazione R_ϕ manda l'esagono Ω in se stesso?
   (b) Calcolare l'immagine di Ω dopo la riflessione rispetto
      (i) all'asse delle ordinate,
      (ii) all'asse delle ascisse,
      (iii) alla retta di equazione $\sqrt{3}x_1 + x_2 = 0$.
   (c) Trovare tutte le riflessioni S_ϕ che mandano l'esagono in se stesso.