

1. Siano

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3;$$

- (a) Far vedere che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ sono vettori indipendenti.
 (b) Trovare un terzo vettore \mathbf{v}_3 tale che $\mathbf{R}^3 = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

2. Trovare equazioni cartesiane per i sottospazi W :

(a) $W = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \subset \mathbf{R}^3;$ (b) $W = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \subset \mathbf{R}^3;$

(c) $W = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \subset \mathbf{R}^2.$ (b) $W = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right\} \subset \mathbf{R}^2.$

3. Esibire basi per gli spazi vettoriali W dell'Esercizio 2.

4. Siano $V, W \subset \mathbf{R}^4$ due sottospazi dati da

$$V = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}, \quad W = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_2 + x_3 = 0, x_2 + 2x_3 = 0\right\}.$$

- (a) Calcolare l'intersezione $V \cap W$.
 (b) Calcolare le dimensioni di V , W e $V \cap W$.
 (c) Calcolare la dimensione $\dim(V + W)$.

5. Siano dati $U = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ e $V = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} : x - y + z - w = 0\right\}$

sottospazi di \mathbf{R}^4 .

(a) Determinare una base per $U + V$ e una base per $U \cap V$;

(b) Determinare se il vettore $v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartiene a $U \cap V$.

6. Siano $V = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$ e $W = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\right\}$ sot-

tospazi di \mathbf{R}^3 .

- (a) Esibire una base di V e una base di W . Calcolare la dimensione di V e di W .
 (b) Calcolare $\dim(V \cap W)$ e $\dim(V + W)$.