

1. Quali V sono spazi vettoriali?

(a) $V = \mathbf{R}^2$ con la solita somma fra vettori e con prodotto definito da

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{per ogni } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \text{ ed ogni } \lambda \in \mathbf{R}$$

(b) $V = \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$ con addizione “ $\oplus$ ” e moltiplicazione “ $\otimes$ ” definite da

$$\begin{aligned} x \oplus y &= xy; & \text{per ogni } x, y \in V, \\ \lambda \otimes x &= x^\lambda; & \text{per ogni } x \in V, \lambda \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

2. Disegnare i seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{R}^2$ e controllare se sono sottospazi lineari:

$$(a) \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_1 = 2x_2 \right\} \subset \mathbf{R}^2, \quad (c) \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_1 = 2 \right\} \subset \mathbf{R}^2,$$

$$(b) \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_1 > 0 \right\} \subset \mathbf{R}^2, \quad (d) \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_1 = x_2 = 0 \right\} \subset \mathbf{R}^2.$$

3. Decidere se sono sottospazi o meno i seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{R}^3$.

$$((a) \ W = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : 0 < t < 1 \right\}, \quad (c) \ W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$((b) \ W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : |x - 2y + z| = 0 \right\}, \quad (d) \ W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 0 \right\}.$$

4. Sia V spazio vettoriale e sia $\mathbf{v} \in V$ un vettore. Dimostrare che il sottoinsieme $W = \{t\mathbf{v} : t \in \mathbf{R}\}$ è sottospazio di V .

5. Scrivere i seguenti sottospazi W come $\text{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r)$ per dei vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$.

$$(a) \ W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^5 : \begin{cases} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{cases} \right\} \subset \mathbf{R}^5;$$

$$(b) \ W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 : x_1 + 2x_3 = 0 \right\} \subset \mathbf{R}^4;$$

$$(c) \ W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : \begin{cases} x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{cases} \right\} \subset \mathbf{R}^3;$$