GEOMETRIA ed ALGEBRA (Schoof) $2^o$ Appello Colleferro, 5 dicembre 2005, ore 14:00–16:00.

*COGNOME* .................................... *NOME* ................................

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 7.5 punti.

1. Calcolare
$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}^{1000}.$$

Gli autovalori della matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ sono $\lambda = 2$ e $\lambda = -1$ con autospazi dati rispettivamente da $\mathrm{span}(\mathbf{v}_1)$, con $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\mathrm{span}(\mathbf{v}_2)$, con $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Sia $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ l'applicazione data dalla moltiplicazione per $A^{1000}$. Allora la matrice rappresentativa di $f$ rispetto alla base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ è data da $\begin{pmatrix} 2^{1000} & 0 \\ 0 & (-1)^{1000} \end{pmatrix}$. Usando il "diagramma commutativo" si trova che la matrice rappresentativa di $f$ rispetta alla base canonica è data da

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{1000} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4\cdot 2^{1000}-1}{3} & \frac{-2^{1000}+1}{3} \\ \frac{4\cdot 2^{1000}-4}{3} & \frac{-2^{1000}+4}{3} \end{pmatrix}.$$

2. Calcolare un'equazione cartesiana della retta di equazione $x+y = 5$ ruotato (in senso antiorario) di un angolo di 45 gradi intorno al punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Facendo un disegno, si vede facilmente che la retta ruotata è una retta *orizzontale*, cioè una retta parallela all'asse $x$. Un'equazione della retta ruotata è quindi $y = \alpha$ per un certo $\alpha \in \mathbf{R}$. Per determinare $\alpha$, osserviamo che la distanza della retta di equazione $x + y = 5$ dal punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ è uguale a $\frac{|1+2-5|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. Anche la distanza della retta ruotata dal punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ è quindi uguale a $\sqrt{2}$. Concludiamo che $\alpha = 2 + \sqrt{2}$ e che l'equazione cercata è data da $y = 2 + \sqrt{2}$.

3. Sia $r \subset \mathbf{R}^3$ la retta di equazione parametrica $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(t \in \mathbf{R})$ e sia $r'$ la retta di equazione parametrica $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $(s \in \mathbf{R})$. Calcolare la distanza fra $r$ ed $r'$.

Questo esercizio è *identico* all'esercizio 3 del primo appello della settimana scorsa.

4. Sia $V$ uno spazio vettoriale e sia $f : V \longrightarrow V$ un'applicazione lineare.
   (a) Dare la definizione del nucleo e dell'immagine di $f$.
   (b) Determinare nucleo ed immagine di $f$ quando $f$ è *zero*, cioè quando abbiamo che $f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ per ogni $\mathbf{v} \in V$.
   (c) Dare un esempio di un'applicazione $f : V \longrightarrow V$ che non è né *zero* né *l'identità*, ma soddisfa $f^2 = f$, cioè $f(f(\mathbf{v})) = f(\mathbf{v})$ per ogni $\mathbf{v} \in V$.

(a) Il nucleo di $f$ è definito come $\{\mathbf{v} \in V : f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$ mentre l'immagine di $f$ è definito come $\{\mathbf{v} \in V : \text{esiste } \mathbf{w} \in V \text{ tale che } f(\mathbf{w}) = \mathbf{v}.\}$.
(b) Se $f$ è *zero*, allora $\ker(f) = V$, mentre $\mathrm{im}(f) = \{\mathbf{0}\}$.
(c) Prendiamo per esempio $V = \mathbf{R}^2$ e $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$ per $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$.