GEOMETRIA ed ALGEBRA (Schoof) 1^o Appello Colleferro, 30 novembre 2005, ore 14:00–16:00.

COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 7.5 punti.

1. Calcolare la matrice inversa della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Usando il metodo spiegato in classe, si calcola che la matrice inversa è

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 3/8 & -1/8 \\ 1/4 & -1/8 & 3/8 \\ -3/4 & 3/8 & -1/8 \end{pmatrix}.$$

2. Sia $C \subset \mathbf{R}^2$ la circonferenza di equazione $x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0$.
   (a) Determinare il centro e il raggio di C.
   (b) Determinare equazioni cartesiane delle rette tangenti a C che passano per il punto $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Scrivendo l'equazione di C nella forma $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$, vediamo che il centro P di C è il punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e il raggio di C è $\sqrt{5}$.

(b) Sia r una retta passante per $Q = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ che è tangente a C in un punto R. Consideriamo il triangolo PQR. La lunghezza del lato PR è uguale al raggio di C ed è quindi uguale a $\sqrt{5}$. La lunghezza di PQ è uguale alla lunghezza del vettore $\begin{pmatrix} 1-(-1) \\ 2 \end{pmatrix}$ ed è quindi uguale a $\sqrt{8}$. Siccome l'angolo fra PR e QR è di 90 gradi, il teorema di Pitagora implica che la lunghezza di QR è uguale a $\sqrt{3}$. Il punto R sta quindi non solo su C, ma anche sulla circonferenza C' di centro Q e raggio $\sqrt{3}$. Un'equazione per C' è data da $(x+1)^2 + y^2 = 3$. Per calcolare $C \cap C'$ sottraiamo le equazioni di C e C' e troviamo l'equazione della retta r di equazione $4x+4y = 2$. Il punto R sta in $C' \cap r$. La sua coordinata x soddisfa quindi l'equazione $(x+1)^2 + (\frac{1}{2} - x)^2 = 3$. Ci sono quindi due possibilità: $R = (x, y) = ((-1+\sqrt{15})/4, (3-\sqrt{15})/4)$ oppure $R = (x, y) = ((-1-\sqrt{15})/4, (3+\sqrt{15})/4)$. Le rette cercate sono quelle che passano per P ed R. Ce ne sono due, di equazione cartesiana $y = (-4+\sqrt{15})(x+1)$ rispettivamente $y = (-4-\sqrt{15})(x+1)$.

3. Sia $r \subset \mathbf{R}^3$ la retta di equazione parametrica $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(t \in \mathbf{R})$ e sia r' la retta di equazione parametrica $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $(s \in \mathbf{R})$. Calcolare la distanza fra r ed r'.

   Il piano π contenente r e parallelo alla retta r' ammette la seguente equazione parametrica: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $(s, t \in \mathbf{R})$. Usando i metodi spiegati in classe si trova che $x - 2y + z - 1 = 0$ è una equazione parametrica per π. La distanza d cercata è uguale alla distanza del punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (della retta r') dal piano π. Usando la formula spiegata in classe troviamo quindi che

$$d = \frac{|0 - 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{6}}.$$

4. Sia $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ l'applicazione data da $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x + 2y \\ 2x + 2y \end{pmatrix}$.
   (a) Trovare una base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ di autovettori di f.
   (b) Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$.

   Questo è l'esercizio 4 dell'8^o foglio.
   (a) Il polinomio caratteristico è $(\lambda - 5)(\lambda - 2) - 2 \cdot 2 = \lambda_2 - 7\lambda + 6$. Gli zeri sono gli autovalori e sono uguali a 1 e a 6. L'autospazio di autovalore $\lambda = 6$ consiste nello spazio delle soluzioni del sistema lineare $\begin{cases} -x + 2y & = & 0 \\ 2x - 4y & = & 0 \end{cases}$ ed è quindi uguale allo span del vettore $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Similmente lo span di $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ è l'autospazio di autovalore $\lambda = 1$. Gli autovettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono indipendenti e formano quindi una base di $\mathbf{R}^2$.
   (b) Siccome abbiamo che $f(\mathbf{v}_1) = 6 \cdot \mathbf{v}_1$ e $f(\mathbf{v}_2) = 1 \cdot \mathbf{v}_2$, la matrice rappresentativa di f rispetto alla base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ è uguale a $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.