Un'*algebra di Boole* è un reticolo limitato, complementato e distributivo. Ogni algebra di Boole è dotata dall'ordinamento parziale dato da $x \leq y$ quando $x \wedge y = x$. Un *atomo* di un reticolo A è un elemento $a \in A$ con la proprietà che per ogni $z \in A$ con $0 \leq z \leq a$ si ha che $z = 0$ oppure $z = a$.

Per ogni insieme X, l'insieme $A = P(X)$ è un'algebra di Boole. In questo caso si ha che $B \vee C = B \cup C$ e $B \wedge C = B \cap C$ per ogni $B, C \in P(X)$. L'ordinamento parziale è dato dall'inclusione. Gli atomi di A sono i sottoinsiemi di A di un solo elemento.

In questa nota consideriamo algebre di Boole *finite*.

Lemma. *Sia A un'algebra di Boole finita. Allora per ogni $x \in A$ diverso da 0 esiste qualche atomo $a \in A$ con $a \leq x$.*

Dimostrazione. Sia $x \in A$ diverso da 0. Costruiamo una catena di elementi $x_1, x_2, x_3, \ldots$ di S, come segue. Poniamo $x_1 = x$. Se x_1 non è atomo, allora esiste $x_2 \in A$ diverso da 0 e da x_1 con $x_2 \leq x_1$. Se x_2 non è atomo, allora esiste $x_3 \in A$ diverso da 0 e da x_2 con $x_3 \leq x_2$ ... etc. Questo processo deve fermarsi. Infatti, la finitezza di A implica che dopo un po' reincontriamo per forza gli stessi elementi. In altre parole, succede che $x_i = x_j$ per qualche $i > j > 0$. Per costruzione abbiamo che $x_i \leq \ldots \leq x_{j+1} \leq x_j$. Per transitività e riflessività, questo implica che $x_{j+1} = x_j$, il quale è falso per costruzione.

In conclusione, la nostra costruzione produce un elemento x_n che è un atomo. Per transitività le disuguaglianze $x_n \leq \ldots \leq x_2 \leq x_1 = x$ implicano che l'atomo x_n soddisfa $x_n \leq x$, come richiesto.

Proposizione. *Sia A un'algebra di Boole finita. Allora*
(1) Per ogni $x \in A$ si ha che $x = \mathrm{Sup}\{a \in A : a \text{ è un atomo e } a \leq x\}$.
(2) Per ogni insieme B di atomi si ha che $B = \{a \in A : a \text{ è atomo e } a \leq \mathrm{Sup}(B)\}$.

Dimostrazione. (1) Sia $x \in A$. Ovviamente x è un maggiorante dell'insieme $\{a \in A : a \text{ è un atomo e } a \leq x\}$. Va dimostrato che x è *minimale* nel senso che è minore di ogni altro maggiorante. Sia quindi z un maggiorante di $\{a \in A : a \text{ è un atomo e } a \leq x\}$. Questo vuol dire che ogni atomo a che soddisfa $a \leq x$ soddisfa anche $a \leq z$. Va dimostrato che $x \leq z$.

Affermiamo che $x \wedge z' = 0$, dove z' indica il complemento di z in A. Infatti, se non fosse così, per il lemma esisterebbe un atomo $a \leq x \wedge z'$. In tal caso, $a \leq z'$ e $a \leq x$. Per ipotesi, il fatto che $a \leq x$ implica che $a \leq z$. In altre parole, si ha che $a = a \wedge z'$ e $a = a \wedge z$. Ne segue che $0 = a \wedge 0 = a \wedge (z \wedge z') = (a \wedge z) \wedge z' = a \wedge z = a$. Contraddizione.

Concludiamo che

$$x = x \wedge 1 = x \wedge (z \vee z') = (x \wedge z) \vee (x \wedge z') = (x \wedge z) \vee 0 = x \wedge z.$$

In altre parole, si ha che $x \leq z$ come richiesto.

Per la parte (2) dobbiamo dimostrare che i due insiemi B e $\{a \in A : a \leq \mathrm{Sup}(B)\}$ sono uguali. Poichè ogni $b \in B$ soddisfa $b \leq \mathrm{Sup}(B)$, è chiaro che $B \subset \{a \in A : a \leq \mathrm{Sup}(B)\}$. Per vedere il viceversa, sia $a \in A$ un elemento per cui $a \leq \mathrm{Sup}(B)$. Questo significa che $a = a \wedge \mathrm{Sup}(B)$. Se scriviamo $B = \{b_1, \ldots, b_s\}$ questo vuol dire che

$$a = a \wedge (b_1 \vee b_2 \vee \ldots \vee b_s) = (a \wedge b_1) \vee (a \wedge b_2) \vee \ldots \vee (a \wedge b_s).$$

Per ogni $i \in \{1, \ldots, s\}$, abbiamo che $a \wedge b_i \leq a$ e $a \wedge b_i \leq b_i$. Dal fatto a e b_i sono atomi, segue che $a \wedge b_i = 0$ se $a \neq b_i$ mentre $a \wedge b_i = a = b_i$ se $a = b_i$.

Se fosse $a \neq b_i$ per ogni $i \in \{1, \ldots, s\}$, allora $a \wedge b_i = 0$ per ogni i e l'espressione a destra sarebbe uguale a $0 \vee \ldots \vee 0 = 0$. Dal fatto che $a \neq 0$ segue quindi che $a = b_i$ per qualche i. Concludiamo che $a \in B$, come richiesto.

Sia A un'algebra di Boole *finita* e sia X l'insieme dei suoi atomi. Definiamo due applicazioni

$$\begin{aligned} \phi : A \longrightarrow P(X), &\qquad \text{data da} \quad x \mapsto \{a \in A : a \text{ è un atomo e } a \leq x\}, \\ \psi : P(X) \longrightarrow A, &\qquad \text{data da} \quad B \mapsto \mathrm{Sup}(B). \end{aligned}$$

Teorema. *Sia A un'algebra di Boole finita. Allora le due applicazioni ϕ e ψ sono compatibili con gli ordinamenti parziali su A e $P(X)$ e soddisfano $\psi\phi = \mathrm{id}_A$ e $\phi\psi = \mathrm{id}_{P(X)}$.*

Dimostrazione. Il fatto che $\psi\phi = \mathrm{id}_A$ e $\phi\psi = \mathrm{id}_{P(X)}$ è il contenuto delle parti (1) e (2) della proposizione. È banale che ϕ e ψ sono compatibili con gli ordinamenti parziali su A e $P(X)$.

Corollario. *Un'algebra di Boole finita è isomorfa all'algebra di Boole $P(X)$ per qualche insieme finito X. In particolare, la cardinalità di A è 2^n dove $n = \#X$.*