LUIGI BIANCHI

PROFESSORE DELLA REGIA UNIVERSITÀ DI PISA

LEZIONI

SULLA

TEORIA DEI NUMERI ALGEBRICI

PISA

ENRICO SPOERRI, LIBRAIO-EDITORE

1923

Generated on 2024-09-20 10:08 GMT / https://hdl.handle.net/2027/ucl.b4286843
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google

Digitized by Google

Original from UNIVERSITY OF CALIFORNIA

PREFAZIONE

Questo corso elementare sulla teoria dei numeri algebrici, già comparso sotto forma più ridotta in litografie del 1920-21, si propone di offrire, pei giovani studenti delle Università italiane, un primo avviamento agli studî di aritmetica superiore.

L'Aritmetica, questo antico ramo delle scienze matematiche, colla semplicità dei suoi fondamenti, col rigore delle deduzioni, e sopra tutto colla bellezza ed armonia delle sue verità, talora facili a scoprirsi per induzione, e spesso di dimostrazione difficile e riposta, ha sempre esercitato un fascino potente sulle menti dei più grandi matematici. Ma soltanto nel secolo scorso, per opera quasi esclusiva di matematici tedeschi, l'Aritmetica ha trovato, si può dire, la sua via *regia,* elevandosi ad aritmetica generale dei corpi algebrici. E qui sono apparsi, completamente, i molteplici legami

781403

Generated on 2024-09-20 10:08 GMT / https://hdl.handle.net/2027/ucl.b4286843
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF CALIFORNIA

delle verità aritmetiche colle teorie dell'algebra, colla teoria dei gruppi finiti ed infiniti, e colle proprietà delle più notevoli trascendenti dell'analisi, quali le esponenziali, le funzioni ellittiche e modulari, le funzioni automorfe in generale, la $\zeta(s)$ di Riemann ecc. Persino nella geometria, a prescindere dal memorabile esempio dato da Gauss colla costruzione della teoria della divisione del circolo, i concetti aritmetici trovano applicazioni e corrispondenze essenziali.

Contribuire alla diffusione di queste teorie aritmetiche, troppo trascurate e presso che ignorate fra noi, è lo scopo che mi propongo colla pubblicazione di questo libro, nel quale, debbo ben dichiararlo, l'opera dell'autore è ristretta principalmente alla scelta ed all'ordinamento della materia. Servono d'introduzione il Cap. I collo sviluppo di quelle proposizioni d'aritmetica razionale, particolarmente riguardanti le forme lineari e i teoremi di Minkowski, la cui conoscenza occorre continuamente nel seguito, ed il Cap. II contenente uno studio preliminare dei campi quadratici, cominciando dai più semplici nei quali vale ancora un algoritmo euclideo delle divisioni, per arrivare ai superiori colla descrizione dei nuovi fenomeni aritmetici che rendono già qui necessaria l'introduzione del geniale concetto di Kummer (Dedekind) degli *ideali*. Segue la teoria generale dei corpi algebrici coll'esposizione, nei Cap. III a IX, di quelle parti fondamentali che richiedono solo la conoscenza dell'algebra, mentre i due ultimi Capitoli X-XI, dedicati ai principii dell'aritmetica analitica, domandano nel lettore la conoscenza dei fondamenti della teoria delle funzioni di variabile complessa.

Generated on 2024-09-20 10:08 GMT / https://hdl.handle.net/2027/uc1.b4286843
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF CALIFORNIA

A chi si sentirà invogliato a proseguire lo studio di queste teorie aritmetiche raccomando la lettura delle opere segnate in fondo al Volume, in particolare di quella completa ed originale di Hilbert: *Die Theorie der algebraischen Zahlenkörper.*

Porgo in fine cordiali ringraziamenti al collega professor *Rosati,* che ha voluto gentilmente coadiuvarmi nella revisione delle bozze del presente libro.

Pisa, febbraio 1923.

LUIGI BIANCHI.

Generated on 2024-09-20 10:09 GMT / https://hdl.handle.net/2027/uc1.b4286843
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF CALIFORNIA

INDICE

PREFAZIONE . . . . . pag. III

CAPITOLO I.

Preliminari d'aritmetica razionale colle prime nozioni della metrica di Minkowski.

§ 1. — Ampliamento di matrici aritmetiche . . . . . pag. 1
2. — Sistemi lineari aritmetici e loro risoluzione . . . . » 7
3. — Equivalenza di sistemi di forme lineari. Sistemi ridotti » 12
4. — Sistemi di n forme lineari aritmetiche. Numero delle classi » 18
5. — Sostituzioni aritmetiche e loro riduzione . . . . . » 25
6. — Il primo teorema di Minkowski per forme lineari razionali . . . . . » 30
7. — Caso di forme a coefficienti razionali qualunque . . . » 33
8. — I teoremi di Minkowski nel senso forte . . . . . » 37
9. — Caso di forme a coefficienti complessi . . . . . » 39
10. — Significato geometrico dei teoremi di Minkowski . . » 42
11. — Prime osservazioni sul teorema di Minkowski pei corpi convessi . . . . . » 46
12. — Le pseudodistanze. Minima pseudodistanza dei punti del reticolo . . . . . » 48
13. — Il teorema del massimo del volume . . . . . » 53

Generated on 2024-09-20 10:10 GMT / https://hdl.handle.net/2027/ucl.b4286843
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF CALIFORNIA

Capitolo II.

Il campo dei numeri di Gauss ed i campi quadratici.

§ 14. — I numeri interi di Gauss . . . . . pag. 58
15. — Algoritmo del massimo comun divisore. Decomposizione in fattori primi . . . . . » 62
16. — I numeri primi nel campo di Gauss . . . . . » 67
17. — Congruenze di numeri nel campo di Gauss . . . . » 70
18. — La funzione $\Phi(m)$ di Gauss e il teorema di Fermat » 74
19. — Resti di potenze. Caso di un modulo primo . . . » 78
20. — Tabelle d'indici rispetto a un modulo primo π . . » 82
21. — Residui quadratici. Simbolo $\left[\frac{D}{\pi}\right]$ . . . . . » 87
22. — Il teorema di reciprocità nel campo di Gauss . . . » 93
23. — Analisi indeterminata di primo grado nel campo di Gauss » 97
24. — Nuovi campi quadratici con algoritmo euclideo . . . » 101
25. — Primi casi di separazione fra numeri indecomponibili e numeri primi . . . . . » 109
26. — Prima introduzione del concetto di *ideali* secondo Dedekind . . . . . » 114

Capitolo III.

Proprietà fondamentali dei numeri algebrici. Corpi algebrici finiti.

§ 27. — Polinomii a coefficienti razionali . . . . . pag. 119
28. — Polinomii a coefficienti interi . . . . . » 122
29. — Decomposizione in fattori irriducibili. Teorema di Eisenstein . . . . . » 125
30. — Prime proprietà dei numeri algebrici . . . . . » 128

Generated on 2024-09-20 10:10 GMT / https://hdl.handle.net/2027/uc1.b4286843
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF CALIFORNIA

§ 31. — Ulteriori proprietà degli interi algebrici . . . . pag. 134
32. — Corpo totale dei numeri algebrici . . . . . » 138
33. — Corpi finiti. Numeri generatori . . . . . » 142
34. — Norma. Discriminanti. Basi del corpo . . . . . » 148
35. — Basi del campo d'integrità. Basi minime . . . . » 153
36. — Ricerca effettiva della base minima . . . . . » 158
37. — Decomponibilità limitata dei numeri nei corpi finiti » 161
38. — Prime applicazioni ai campi quadratici . . . . . » 167
39. — Le unità nei corpi quadratici . . . . . » 172
40. — Alcuni esempi di corpi cubici . . . . . » 176
41. — Gli n corpi coniugati $K_1, K_2, \ldots K_n$ . . . . . » 182
42. — Teoremi di Minkowski sul valore assoluto del numero fondamentale D . . . . . » 185
43. — Minimo della somma dei moduli di n forme lineari » 190
44. — Nuova limitazione inferiore pel numero fondamentale D » 195

Capitolo IV.

Le unità nei corpi algebrici e il teorema di Dirichlet.

§ 45. — Lemmi fondamentali. Esistenza di interi algebrici infinitesimi . . . . . pag. 199
46. — Conclusione della dimostrazione del lemma b) . . » 205
47. — Esistenza di un'unità di norma positiva e di modulo $\neq 1$ . . . . . » 208
48. — I logaritmi coniugati delle unità . . . . . » 211
49. — Dimostrazione di Minkowski del teorema B) . . . » 216
50. — Le $\nu - 1$ unità indipendenti. Esponenti delle unità » 218
51. — Sistemi fondamentali di unità. Teorema finale di Dirichlet . . . . . » 222

Generated on 2024-09-20 10:10 GMT / https://hdl.handle.net/2027/ucl.b4286843
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF CALIFORNIA

§ 52. — Limite superiore $2^{n+1} - 2$ pel numero delle unità ridotte . . . . . pag. 226
53. — Cangiamento dei sistemi fondamentali . . . . . » 230
54. — Ricerca effettiva dei sistemi fondamentali di unità . » 234
55. — Numeri associati. Numeri ridotti . . . . . » 237
56. — Nuova dimostrazione di Minkowski del teorema di Dirichlet . . . . . » 242

Capitolo V.

Ideali nei corpi algebrici - Moltiplicazione e divisibilità. Decomposizione in ideali primi.

§ 57. — Ideali. Loro basi. Norma dell'ideale . . . . . pag. 247
58. — Costruzione della base di un ideale. Basi ridotte . » 253
59. — Costruzione di ideali di norma data . . . . . » 256
60. — Ideali primarii nei corpi quadratici . . . . . » 260
61. — Moltiplicazione degli ideali . . . . . » 265
62. — Ideali moltiplicatori nei corpi quadratici . . . . » 270
63. — Esistenza degli ideali moltiplicatori . . . . . » 274
64. — Conseguenze del teorema principale . . . . . » 277
65. — Calcolo dell'ideale quoziente e degli ideali moltiplicatori . . . . . » 280
66. — Leggi di divisibilità. Ideali primi. Decomposizione in ideali primi . . . . . » 283
67. — Unicità della decomposizione in ideali primi. Grado degli ideali primi . . . . . » 287
68. — Massimo comun divisore e minimo multiplo comune » 290
69. — Decomponibilità dei numeri . . . . . » 295

Generated on 2024-09-20 10:10 GMT / https://hdl.handle.net/2027/ucl.b4286843
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF CALIFORNIA

Capitolo VI.

Congruenze di numeri rispetto ad ideali.

Estensione delle teorie di aritmetica razionale.

§ 70. — Congruenza di numeri rispetto ad un ideale. Nuovo significato della norma . . . . . pag. 301

71. — Congruenze simultanee di numeri rispetto ad ideali. Applicazioni . . . . . » 305

72. — Il teorema della norma del prodotto . . . . . » 309

73. — La funzione aritmetica $\Phi(A)$ per un ideale . . . » 313

74. — Generalizzazione del teorema di Fermat. Resti di potenze . . . . . » 317

75. — Congruenze rispetto a ideali primi. Tabelle d'indici » 320

76. — Costruzione di tabelle d'indici . . . . . » 322

77. — Residui quadratici . . . . . » 328

78. — Ideali primi nei corpi quadratici . . . . . » 331

79. — Riduzione del simbolo $\left[\frac{\theta}{P}\right]$ per corpi quadratici al simbolo di Legendre . . . . . » 335

80. — Caso di un ideale P di primo grado . . . . . » 341

Capitolo VII.

Equivalenza di ideali. Numero finito delle classi. Gruppo di composizione delle classi. Forme decomponibili coordinate agli ideali.

§ 81. — Equivalenza di ideali e leggi fondamentali . . . pag. 346

82. — Numero finito delle classi . . . . . » 349

83. — Gruppo di composizione e periodi delle classi . . » 354

84. — Le classi fondamentali e le basi del gruppo . . . » 360

Generated on 2024-09-20 10:11 GMT / https://hdl.handle.net/2027/uc1.b4286843
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF CALIFORNIA

§ 85. — I periodi $n_1, n_2 \ldots n_r$ delle classi generatrici come invarianti . . . . . pag. 365

86. — I fattori ideali di Kummer. Concetto assoluto di massimo comun divisore . . . . . » 368

87. — I numeri frazionari coordinati alle classi di ideali. Teorema di Hurwitz. . . . . » 372

88. — Forme decomponibili coordinate agli ideali . . . » 376

89. — Equivalenza e classi delle forme X . . . . . » 381

90. — Gruppo automorfo delle forme X decomponibili . . » 385

91. — Moltiplicazione degli ideali e composizione delle forme coordinate X . . . . . » 387

Capitolo VIII.

Decomposizione dei numeri primi razionali e congruenze di grado superiore. Caratteristica dei numeri primi critici secondo Dedekind. Ideali primi nei corpi circolari.

§ 92. — Polinomii considerati rispetto a un modulo primo p. Algoritmo Euclideo . . . . . pag. 389

93. — Decomposizione in fattori irriducibili. Congruenze rispetto al doppio modulo $(p, M(x))$ . . . . . » 395

94. — Ricerca degli ideali primi di primo grado in un corpo algebrico $K(\theta)$ . . . . . » 398

95. — Caso in cui p non divide l'indice C di θ. La congruenza $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$. . . . . » 402

96. — Infinità degli ideali primi di primo grado in $K(\theta)$. » 406

97. — Preliminari pel teorema di decomposizione di Dedekind . . . . . » 408

98. — Teorema finale di decomposizione . . . . . » 413

99. — I numeri primi critici non eccezionali . . . . . » 417

Generated on 2024-09-20 10:11 GMT / https://hdl.handle.net/2027/ucl.b4286843
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF CALIFORNIA

§ 100. — Nuova dimostrazione generale di una prima parte del teorema A) . . . . . pag. 421
101. — Grado e discriminante del corpo circolare $K\left(\varepsilon^{\frac{2\pi i}{q^r}}\right)$. » 424
102. — La base minima ed il numero fondamentale D di $K(\varepsilon)$ » 429
103. — Gli ideali primi nel corpo $K(\varepsilon)$ . . . . . » 432

Capitolo IX.

Ordini nei corpi algebrici. Unità negli ordini. Ideali regolari e loro leggi di decomposizione. Corpi di Galois.

§ 104. — Moduli finiti e loro basi . . . . . pag. 437
105. — Moduli a n termini in $K(\theta)$. Norma. Divisibilità. Equivalenza . . . . . » 441
106. — Ordini. Conduttori F degli ordini . . . . . » 446
107. — Le unità negli ordini . . . . . » 450
108. — Ideali negli ordini. Ideali relativi regolari . . . » 454
109. — Corrispondenza degli ideali relativi agli assoluti . » 459
110. — Decomposizione degli ideali relativi . . . . . » 462
111. — Esempio degli ordini nei corpi quadratici . . . » 465
112. — Costruzione della risolvente di Galois e sue proprietà fondamentali . . . . . » 469
113. — Gruppo di Galois di un'equazione . . . . . » 475
114. — Corrispondenza fra i sottogruppi del gruppo G e i corpi divisori di $K(\omega)$ . . . . . » 479
115. — Ideali invarianti e moltiplicatori di un corpo $K(\omega)$ di Galois . . . . . » 484
116. — Cenno sui corpi Abeliani . . . . . » 488

Generated on 2024-09-20 10:11 GMT / https://hdl.handle.net/2027/uc1.b4286843
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF CALIFORNIA

Capitolo X.

Primi principii d'aritmetica analitica. Le funzioni zèta di Riemann e Dedekind e la determinazione trascendente del numero h delle classi.

§ 117. — Algoritmo dei prodotti infiniti . . . . . pag. 493

118. — Formola fondamentale di Eulero . . . . . » 496

119. — Definizione della funzione $\zeta(s)$ di Riemann nel semipiano complesso $R(s) > 1$. Lemma sulle serie di Dirichlet . . . . . » 500

120. — Conseguenze. Prolungamento analitico della $\zeta(s)$ al semipiano $R(s) > 0$ . . . . . » 506

121. — Preliminari per la funzione $\zeta_k(s)$ di Dedekind . » 510

122. — La funzione ζ_k di Dedekind e le funzioni parziali $\zeta_k(s, H)$ . . . . . » 515

123. — Osservazioni preliminari sul calcolo del limite $\lim_{t=\infty} \frac{T}{t}$ » 519

124. — Introduzione di variabili continue. Il limite $\lim_{t=\infty} \left(\frac{T}{t}\right)$ ridotto al calcolo di un volume . . . . . » 524

125. — Calcolo del volume V e della costante g . . . » 528

126. — Conseguenza del teorema fondamentale A) § 123. Formola pel numero h delle classi . . . . . » 532

127. — Nuova dimostrazione della infinità degli ideali primi di primo grado . . . . . » 538

128. — I caratteri $\chi(H)$ delle classi . . . . . » 541

129. — Le h trascendenti $\Phi\chi(s)$ corrispondenti agli h caratteri espresse per le zèta parziali per . . . . » 546

Generated on 2024-09-20 10:18 GMT / https://hdl.handle.net/2027/uc1.b4286843
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF CALIFORNIA

Capitolo XI.

Il numero h delle classi nei corpi quadratici e nei corpi circolari e il teorema di Dirichlet sulle progressioni aritmetiche.

§ 130. — Trasformazione della formola pel numero h delle classi in un corpo quadratico . . . . . pag. 549

131. — Convergenza della serie $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(D,n)}{n^s}$ nel semipiano $R(s) > 0$ . . . . . » 553

132. — Il numero h delle classi espresso per una serie infinita . . . . . » 557

133. — Somme di Gauss e loro prime proprietà . . . . » 560

134. — Determinazione di $\varphi(1,n)$ secondo Kronecker . . » 563

135. — I valori delle somme di Gauss in generale . . . » 569

136. — Riduzione della serie $\sum \frac{(D,n)}{n}$ a un integrale definito. Caso $D \equiv 1 \pmod 4$ . . . . . » 574

137. — Separazione dei due casi e formole definitive pel numero h delle classi . . . . . » 580

138. — I caratteri del gruppo Abeliano lineare $\nu' \equiv a\nu \pmod m$ » 585

139. — La funzione $\zeta_k(s)$ di Dedekind pel corpo circolare $k\left(e^{\frac{2\pi i}{q^r}}\right)$ estesa al semipiano $R(s) > 0$ . . . . . » 591

140. — Il numero h delle classi nel corpo circolare $k\left(e^{\frac{2\pi i}{q^r}}\right)$ » 595

141. — Preliminari al teorema sulle progressioni aritmetiche » 599

142. — L'equazione $X_m(x) = 0$ alle radici primitive m^{me} dell'unità. Sua irriducibilità . . . . . » 603

143. — Ideali primi nel corpo $k\left(e^{\frac{2\pi i}{m}}\right)$ . . . . . » 609

144. — Le serie di Dirichlet $L_\chi(s) = \sum_n \frac{\chi(n)}{n^s}$ . . . » 613

145. — Paragone collo sviluppo di $\zeta_k(s)$ e conclusione . » 617

Nota al § 74 sulle radici primitive per moduli (ideali) composti » 623

Elenco delle principali opere consultate per la redazione del presente trattato . . . . . » 631

Generated on 2024-09-20 10:12 GMT / https://hdl.handle.net/2027/ucl.b4286843
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF CALIFORNIA