

1. Sia A un anello commutativo e sia $I \subset A$ un ideale. Dimostrare che se $I \neq A$, allora esiste un ideale massimale $\mathfrak{m}$ tale che $I \subset \mathfrak{m} \subset A$.
2. Siano $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$. Dimostrare: se α è algebrico su $\mathbf{Q}$ e β è algebrico su $\mathbf{Q}(\alpha)$, allora β è algebrico su $\mathbf{Q}$.
3. Dimostrare che $\pi^6 + \sqrt{2}\pi^2 + \sqrt{7}$ è trascendente su $\mathbf{Q}$.
4. Determinare il grado del campo di spezzamento dei seguenti polinomi su $\mathbf{Q}$:
 - (a) $X^3 - 1$;
 - (b) $X^3 - 3$;
 - (c) $X^{10} - 1$;
 - (d) $X^2 - 841$;
 - (e) $X^3 - 3X - 1$, (Sugg. Se α è uno zero, anche $2 - \alpha^2$ lo è.)
5. Determinare il grado di un campo di spezzamento del polinomio $X^4 - 2$ sui campi

(a) $\mathbf{C}$,	(c) $\mathbf{Q}$,	(e) $\mathbf{Q}(\sqrt[4]{2})$.
(b) $\mathbf{R}$,	(d) $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$,	(f) $\mathbf{Z}_2$.
6. Sia p un primo e sia k un campo di caratteristica p . Sia $a \in k$ e sia f il polinomio “di Artin-Schreier” $f = X^p - X - a \in k[X]$. Sia K un campo di spezzamento di f su k e sia $\alpha \in K$ uno zero di f . Dimostrare che:
 - (a) per ogni $\lambda \in \mathbf{Z}_p$ anche $\alpha + \lambda$ è uno zero di f .
 - (b) f è irriducibile in $k[X]$ oppure f è un prodotto di p fattori lineari in $k[X]$. In entrambi i casi determinare $[K : k]$. (Sugg. Per un fattore irriducibile g di f considerare il *sottogruppo* $H = \{\lambda \in \mathbf{Z}_p : g(X + \lambda) = g(X)\}$ di $\mathbf{Z}_p$).
7. Determinare i polinomi ciclotomici $\Phi_n(X)$ per $1 \leq n \leq 10$.
8. Sia $\Phi_n(X)$ l' n -esimo polinomio ciclotomico.
 - (a) Sia α uno zero di $\Phi_n(X)$. Dimostrare che $\mathbf{Q}(\alpha)$ è un campo di spezzamento di $\Phi_n(X)$ su $\mathbf{Q}$.
 - (b) Sia p un primo congruo a 1 (mod n). Dimostrare che $\Phi_n(X)$ si fattorizza in fattori lineari in $\mathbf{F}_p[X]$.
9.
 - (a) Dimostrare che se $m > 1$ è dispari, allora $\Phi_{2m}(X) = \Phi_m(-X)$.
 - (b) Sia p un primo e $m > 1$ divisibile per p . Dimostrare che $\Phi_{mp}(X) = \Phi_m(X^p)$.
 - (c) Sia $n \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$ e sia m il prodotto dei fattori primi di n . Per esempio, se $n = 1000$, allora $m = 10$. Dimostrare che $\Phi_n(X) = \Phi_m(X^{n/m})$.
 - (d) Calcolare $\Phi_{1000}(X)$.
- 10.*Esibire $n \geq 1$ con la proprietà che non tutti i coefficienti di $\Phi_n(X)$ sono in $\{-1, 0, +1\}$.