

1. Sia K un campo finito. Dimostrare che $\text{car}(K) \neq 0$. Dimostrare $\#K$ è una potenza di un numero primo.
2. Sia $f : K \longrightarrow L$ un omomorfismo di campi. Dimostrare che $\text{car } K = \text{car } L$.
3. Calcolare i gradi su $\mathbf{Q}$ dei seguenti sottocampi di $\mathbf{C}$:
 (a) $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})$; (b) $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, i)$; (c) $\mathbf{Q}(\exp(\frac{2\pi i}{p}))$, per p un numero primo.
4. (a) Esibire $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ trascendenti, tali che la somma $\alpha + \beta$ sia algebrica.
 (b) Esibire $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ trascendenti, tali che il prodotto $\alpha\beta$ sia algebrico.
 (c) Esistono $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ trascendenti, tali che sia $\alpha + \beta$ che $\alpha\beta$ siano algebrici?
5. Dimostrare che i sottocampi $\mathbf{Q}(\pi)$ e $\mathbf{Q}(e)$ di $\mathbf{C}$ sono isomorfi (Sugg. $\pi = 3,1415926\dots$ e $e = 2,7182818\dots$ sono numeri trascendenti).
6. Sia $K \subset L$ un'estensione di grado $[L : K]$ dispari. Sia $\alpha \in L$. Dimostrare che $K(\alpha) = K(\alpha^2)$.
7. Sia $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{5}} \in \mathbf{C}$.
 (a) Determinare il polinomio minimo su $\mathbf{Q}$ di ζ .
 (b) Determinare il polinomio minimo su $\mathbf{Q}$ di $\xi = \zeta + \zeta^{-1}$ (Sugg. il polinomio ha grado 2).
 (c) Determinare il polinomio minimo di ζ *sul campo* $\mathbf{Q}(\xi)$.
8. Sia $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{7}} \in \mathbf{C}$.
 (a) Determinare il polinomio minimo su $\mathbf{Q}$ di ζ .
 (b) Determinare il polinomio minimo su $\mathbf{Q}$ di $\zeta + \zeta^{-1}$ (Sugg. il polinomio ha grado 3).
 (c) Determinare il polinomio minimo su $\mathbf{Q}$ di $\eta = \zeta + \zeta^2 + \zeta^4$ (Sugg. il polinomio ha grado 2, calcolare $\eta + \eta'$ e $\eta\eta'$ dove $\eta' = \zeta^3 + \zeta^5 + \zeta^6$).
9. Sia K un campo di caratteristica $p > 0$.
 (a) Dimostrare che $K^p = \{x^p : x \in K\}$ è un sottocampo di K .
 (b) Per $K = \mathbf{Z}_p$ calcolare il grado $[K : K^p]$.
 (c) Stessa domanda per il campo delle funzioni razionali $K = \mathbf{Z}_p(X)$.
10. Sia F un campo. Un *automorfismo* di F è un omomorfismo di anelli $F \longrightarrow F$ biiettivo.
 (a) Dimostrare che l'insieme degli automorfismi di F formano un gruppo: $\text{Aut } F$.
 (b) Sia H un insieme di automorfismi di F . Dimostrare che l'insieme dei "punti fissi" $F^H = \{x \in F : \sigma(x) = x \text{ per ogni } x \in H\}$ è un sottocampo di F .
 (c) Sia K un sottocampo di F . Dimostrare gli automorfismi $\sigma \in \text{Aut } F$ che hanno la proprietà che $\sigma(x) = x$ per ogni $x \in K$, formano un sottogruppo di $\text{Aut } F$.
11. Sia K un campo e sia $f : K \longrightarrow K$ un automorfismo di campi. Dimostrare che la restrizione di f al sottocampo minimale di K , è l'identità.