1. . Sia $f(X, Y) = X^3 + Y^2X^2 + 2YX + Y$
  - (a) Dimostrare che f è irriducibile nell'anello $\mathbf{Q}[X, Y]$. (Sugg. Sia ha che $\mathbf{Q}[X, Y] = \mathbf{Q}[Y][X]$)
  - (b) Dimostrare che $(Z+1)f(X, Y)^2 + f(X, Y) + Z^2$ è irriducibile nell'anello $\mathbf{Q}[X, Y, Z]$.
2. Sia $H = \left\{ k \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} : k \in \mathbf{Z} \right\} \subset \mathbf{Z}^2$. Esibire un'equazione "cartesiana" per H . Cioè, determinare un'equazione lineare $aX + bY = c$ con coefficienti $a, b, c \in \mathbf{Z}$ tale che $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : ax + by = c \right\}$. Stessa domanda per $H' = \left\{ k \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} : k \in \mathbf{Z} \right\}$.
3. Sia G un gruppo abeliano finito con elemento neutro e . Sia $A \subset G$ un sottogruppo e sia $B = G/A$. Sia $m = \#A$ e sia $n = \#B$. Supponiamo che $\text{mcd}(m, n) = 1$.
  - (a) Sia $B' = \{x \in G : x^n = e\}$; dimostrare che B' è un sottogruppo di G con le proprietà che $A \cap B' = \{e\}$ e che $AB' = G$
  - (b) Dimostrare che la mappa composta $B' \subset A \rightarrow B$ è un isomorfismo.
  - (c) Dimostrare che G è isomorfo a $A \times B$.
4. Dimostrare che esiste un $\mathbf{Z}[i]$ -modulo di cardinalità 2, ma non ne esiste uno di cardinalità 3.
5. Sia k un campo. I seguenti $k[X]$ -moduli M hanno k -dimensione finita. La moltiplicazione per X è un'applicazione k -lineare $M \rightarrow M$. Calcolarne il polinomio caratteristico quando:
  - (a) $M = k[X]/(X^4)$;
  - (b) $M = k[X]/(X^2) \times k[X]/(X^2)$;
  - (c) $M = k[X]/(X) \times k[X]/(X+1) \times k[X]/(X+2) \times k[X]/(X+3)$.
6. (a) Fattorizzare il polinomio $X^4 + 4$ in $\mathbf{Z}[X]$.
Sia $n > 1$ un numero intero.
  - (b) Dimostrare che $n^4 + 4$ non è primo.
  - (c)* Dimostrare che $n^4 + 4^n$ non è primo.
7. Siano A e B anelli commutativi e sia $f : A \rightarrow B$ un omomorfismo di anelli. Dimostrare che l'applicazione $\phi : \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$ data da $\phi(\mathfrak{p}) = f^{-1}(\mathfrak{p})$ è continua per la topologia di Zariski.
8. Sia $C(\mathbf{R})$ l'anello delle funzioni continue $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Chi è l'elemento 1 di quest'anello? Una funzione $f \in C(\mathbf{R})$ si dice a *supporto compatto* se esiste $M > 0$ tale che $f(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$ che soddisfa $|x| > M$. Dimostrare che le funzioni continue a supporto compatto formano un ideale di $C(\mathbf{R})$.