1. Dire se i seguenti ideali degli anelli $\mathbf{Z}[X]$, $\mathbf{Q}[X]$ e $\mathbf{Z}_3[X]$ sono primi o meno:

$$(X^3-18X+12),\qquad (X^3-18X+12,5),\qquad (X^3-18X+12,X-1).$$

   (Sono richieste quindi $3\times 3=9$ risposte ....)

2. Sia A un PID e sia $a\in A$ un elemento non nullo. Dimostrare che l'anello $A/(a)$ possiede solo un numero finito di ideali.

3. Scrivere i gruppi $\mathbf{Z}^*_{120}$ e $\mathbf{Z}^*_{10!}$ come prodotto di gruppi ciclici tipo $\mathbf{Z}_n$.

4. Sia $H\subset\mathbf{Z}^2$ il sottogruppo $\{k\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix} : k\in\mathbf{Z}\}$. Esibire elementi v_1,v_2 di $\mathbf{Z}^2$ e $a\in\mathbf{Z}$ tali che $\mathbf{Z}^2=\mathbf{Z}v_1+\mathbf{Z}v_2$ e $H=\mathbf{Z}av_1$.

5. Sia $H\subset\mathbf{Z}^3$ il sottogruppo $\{(x,y,z)\in\mathbf{Z}^3 : 2x+3y+4z=0\}$. Esibire elementi v_1,v_2,v_3 di $\mathbf{Z}^3$ e $a_1,a_2\in\mathbf{Z}$ tali che $\mathbf{Z}^3=\mathbf{Z}v_1+\mathbf{Z}v_2+\mathbf{Z}v_3$ e $H=\mathbf{Z}a_1v_1+\mathbf{Z}a_2v_2$.

6. Siano A e B anelli commutativi e sia $f: A\longrightarrow B$ un omomorfismo di anelli.
   (a) Dimostrare: se I è un ideale di B allora $f^{-1}(I)$ è un ideale di A. È vero che $f(J)$ è un ideale di B se J è un ideale di A?
   (b) Dimostrare: se $\mathfrak{p}$ è un ideale primo di B allora $f^{-1}(\mathfrak{p})$ è un ideale primo di A.
   (c) Se $\mathfrak{m}$ è un ideale massimale di B allora $f^{-1}(\mathfrak{m})$ non è necessariamente un ideale massimale di A. Dare un controesempio.

7. Sia R un anello commutativo con 1. Un elemento $x\in R$ si dice *nilpotente* se $x^n=0$ per qualche $n\geq 0$.
   (a) Dimostrare che gli elementi nilpotenti di R formano un ideale N di R.
   (b) Dimostrare che $N\subset\bigcap_{\mathfrak{p}}\mathfrak{p}$ dove $\mathfrak{p}$ varia fra gli ideali primi di R. Nel prossimo esercizio dimostriamo l'inclusione opposta.

8. Siano R e N come nell'esercizio 9 e sia $x\in R-N$. Sia Ω l'insieme degli ideali I di R che hanno la proprietà che $x^n\notin I$ per ogni $n\geq 1$. Ordiniamo Ω tramite l'inclusione.
   (a) Dimostrare che $\Omega\neq\emptyset$.
   (b) Dimostrare che ogni catena in Ω ha un maggiorante in Ω.
   (c) Per il Lemma di Zorn esiste un elemento massimale $M\in\Omega$. Dimostrare che M è un ideale primo di R.
   (d) Dimostrare che si ha che $\bigcap_{\mathfrak{p}}\mathfrak{p}\subset N$.

9. Sia $[0,1]$ l'intervallo chiuso $\{x\in\mathbf{R} : 0\leq x\leq 1\}$. Sia $C[0,1]$ l'anello delle funzioni continue $[0,1]\longrightarrow\mathbf{R}$. Per $x\in[0,1]$ definiamo $\mathfrak{m}_x=\{f\in C[0,1] : f(x)=0\}$.
   (a) Sia $x\in[0,1]$. Dimostrare che $\mathfrak{m}_x$ è un ideale massimale di $C[0,1]$.
   (b) Far vedere che ogni ideale massimale di $C[0,1]$ è uguale a $\mathfrak{m}_x$ per qualche $x\in[0,1]$. (Sugg. usare la compattezza dell'intervallo $[0,1]$.)