1. Sia R il sottoanello $\{a + b\sqrt{-6} : a, b \in \mathbf{Z}\}$ di $\mathbf{C}$.
   (a) Esibire un isomorfismo dall'anello $\mathbf{Z}[X]/(X^2 + 6)$ a R.
   (b) Dimostrare che l'ideale $(2, \sqrt{-6})$ di R non è principale.
   (c) Dimostrare che l'elemento 2 di R è irriducibile, ma non è primo. (Sugg. la norma $N : R \longrightarrow \mathbf{Z}$ data da $N(x) = x\overline{x}$ è moltiplicativa).
2. Dire se il polinomio X^3-2 è irriducibile o meno nei domini $\mathbf{R}[X]$, $\mathbf{Z}[X]$, $\mathbf{Z}_7[X]$, $\mathbf{Z}_{31}[X]$.
3. Fattorizzare il polinomio $X^6 - 1$ in $\mathbf{C}[X]$, $\mathbf{R}[X]$, $\mathbf{Z}_3[X]$, $\mathbf{Z}_5[X]$.
4. Decidere se il polinomio $X^5 + X^3 + 1$ è irriducibile o meno negli anelli $\mathbf{Z}_2[X]$, $\mathbf{Z}_3[X]$, $\mathbf{Z}[X]$, $\mathbf{Q}[X]$ e $\mathbf{R}[X]$.
5. Fattorizzare i seguenti elementi dell'anello R in fattori irriducibili di R.
   (a) $X^2 - Y^2$ con $R = \mathbf{Q}[X, Y]$;
   (b) $X^3 + 4X^2 + 9X + 6$ con $R = \mathbf{Q}[X]$;
   (c) $\frac{13}{7}X^2 - 91$ con $R = \mathbf{Q}[X]$;
   (d) 247 con $R = \mathbf{Z}$.
6. Fattorizzare i seguenti elementi dell'anello R in fattori irriducibili di R.
   (a) $X^3 - Y^3$ con $R = \mathbf{Q}[X, Y]$;
   (b) $X^3 - X^2 - 8X + 6$ con $R = \mathbf{Z}[X]$;
   (c) $X^4 - X^2 + 4X + 3$ con $R = \mathbf{Q}[X]$;
   (d) $2i - 9$ con $R = \mathbf{Z}[i]$.
7. Sia p un primo e sia $n \geq 1$.
   (a) Dimostrare che il polinomio $X^{p^n} - 1 \in \mathbf{Z}[X]$ è divisibile per $X^{p^{n-1}} - 1$. Scriviamo $\Phi_{p^n}(X)$ per il quoziente.
   (b) Dimostrare che $\Phi_{p^n}(X)$è irriducibile in $\mathbf{Z}[X]$ e quindi in $\mathbf{Q}[X]$.
   (Sugg. Usare il criterio di Eisenstein per il primo p.)
8. Il polinomio *reciproco* di $f = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j \in \mathbf{Q}[X]$ (con a_0, a_n diversi da 0) è il polinomio $f^\vee = \sum_{j=0}^{n} a_{n-j} X^j \in \mathbf{Q}[X]$. Dimostrare che f è irriducibile se e solo se $f^\vee$ è irriducibile.
9. Sia $\mathbf{Z}[i]$ l'anello degli interi di Gauss.
   (a) Fattorizzare gli elementi $5 + i$ e $239 + i$ come prodotto di elementi irriducibili di $\mathbf{Z}[i]$. (Sugg. la norma di $239 + i$ è divisibile per 13^4.)
   (b) Dedurre la formula classica che John Machin ha usato nel 1706 per calcolare *a mano* i primi 100 decimali di π:

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}, \qquad \text{con} \quad \arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

$$\left(\begin{array}{l} \pi = 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640 6 \\ \quad 2862089986280348253421170 68\ldots \end{array} \right)$$