1. Sia $G$ un gruppo. Dimostrare che un sottogruppo normale di $G$ è unione disgiunta di classi di coniugio di $G$.

2. Sia $G$ un gruppo finito.
   (a) Dimostrare che se $G$ ha solo due classi di coniugio, allora $G \cong \mathbf{Z}_2$.
   (b) Dimostrare che se $G$ ha tre classi di coniugio, allora $G \cong \mathbf{Z}_3$ oppure $G \cong S_3$.

3. Dimostrare che $\langle x, y \,|\, x^2 = y^2,\, xyx^{-1} = y^{-1} \rangle$ è una presentazione del gruppo $Q_4$ dei quaternioni di cardinalità 8. (Sugg: le relazioni implicano che $x^4 = y^4 = e$).

4. Il gruppo $S_4$ agisce linearmente su $\mathbf{R}^4$ permutando i vettori della base canonica $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Cioè, si ha che $\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$, per $i = 1, 2, 3, 4$. Sia $V$ il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ dato da $V = \{(v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbf{R}^4 : v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0\}$.
   (a) Dimostrare che $S_4$ preserva $V$.
   L'azione di $S_4$ ci dà quindi un'omomorfismo $\varrho : S_4 \longrightarrow \mathrm{GL}(V) \cong \mathrm{GL}_3(\mathbf{R})$.
   (b) Calcolare il polinomio caratteristico di $\varrho(\sigma)$, per $\sigma = (1\,2\,3)$ e $\sigma = (1\,2\,3\,4)$.

5. (*prodotto semidiretto*) Siano $N$ e $H$ gruppi e sia $\phi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ un omomorfismo. Per ragioni psicologiche scriviamo $\phi_h$ per $\phi(h)$. Definiamo una composizione sul prodotto cartesiano $P = N \times H$ come segue:

$$(x, h) \cdot (x', h') = (x\phi_h(x'), hh'), \qquad \text{per } (x, h) \text{ e } (x', h') \text{ in } P.$$

   (a) Dimostrare che con questa composizione $P$ è un gruppo. Il gruppo $P$ è il *prodotto semidiretto di $H$ per $N$*. Notazione: $N \rtimes_\phi H$ oppure $N \rtimes H$ se è chiaro chi è $\phi$.
   (b) Dimostrare che $\{(x, h) \in N \rtimes H : h = e\}$ è un sottogruppo normale $N'$ di $N \rtimes H$ e che $N'$ è isomorfo a $N$. Dimostrare che $(N \rtimes H)/N'$ è isomorfo ad $H$.
   (c) Dimostrare che $\{(x, h) \in N \rtimes H : n = e\}$ è un sottogruppo $H'$ e che $H'$ è isomorfo ad $H$.
   (d) Dimostrare che se $\phi$ non è banale, allora $H'$ non è normale in $N \rtimes H$ .

6. Sia $\phi$ l'unico omomorfismo non banale $\mathbf{Z}_4 \to \mathrm{Aut}(\mathbf{Z}_3)$. Sia $B$ il prodotto semidiretto $\mathbf{Z}_3 \rtimes_\phi \mathbf{Z}_4$ associato a $\phi$. Si ha che $\#B = 12$.
   (a) Determinare gli elementi di ordine 2 di $B$.
   (b) Dimostrare che $B$ non è commutativo e non è isomorfo né al gruppo diedrale $D_6$ né al gruppo alternante $A_4$.

7. Sia $G$ un gruppo e sia $D = [G, G]$ il suo sottogruppo dei commutatori. Sia $f : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(D)$ la mappa data da $x \mapsto \sigma_x$ dove $\sigma_x(h) = xhx^{-1}$ per ogni $h \in D$.
   (a) Dimostrare che $f(D)$ è contenuto nel sottogruppo $[\mathrm{Aut}(D), \mathrm{Aut}(D)]$ dei commutatori di $\mathrm{Aut}(D)$.
   (b) Dimostrare che $f(D)$ è uguale al sottogruppo $\mathrm{Inn}(D) \subset \mathrm{Aut}(D)$ degli automorfismi *interni* di $D$ è dedurre che $\mathrm{Inn}(D) \subset [\mathrm{Aut}(D), \mathrm{Aut}(D)]$.
   (c) Dimostrare che il gruppo simmetrico $S_3$ non può essere sottogruppo dei commutatori di nessun gruppo.
   (d)*Dimostrare che per $n \geq 3$ il gruppo diedrale $D_n$ non può essere sottogruppo dei commutatori di nessun gruppo.