

1. Sia $\tau \in S_8$ la permutazione $(1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6)$. Sia $G \subset S_8$ il sottogruppo generato da τ .
 - (a) Determinare le orbite dell'azione di G su $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
 - (b) Per ogni $x \in X$, determinare il suo stabilizzatore $G_x \subset G$.
2. Sia G un gruppo e siano N_1, N_2 due sottogruppi normali di G con la proprietà $N_1 \cap N_2 = \{e\}$.
 - (a) Dimostrare che N_1 e N_2 commutano.
 - (b) Dimostrare che il sottogruppo $N_1 N_2 = \{xy : x \in N_1 \text{ e } y \in N_2\}$ è isomorfo a $N_1 \times N_2$.
3. Sia G un gruppo finito, sia p un primo e sia $N \subset G$ un sottogruppo normale di cardinalità una potenza di p . Dimostrare che $N \subset P$ per ogni p -sottogruppo di Sylow P di G .
4. Sia G un gruppo di cardinalità 33.
 - (a) Dimostrare che i sottogruppi di Sylow di G sono normali.
 - (b) Dimostrare che $G \cong \mathbf{Z}_{33}$.
5. Sia G un gruppo di cardinalità 45.
 - (a) Dimostrare che i sottogruppi di Sylow di G sono normali.
 - (b) Dimostrare che G è abeliano.
6. Sia G un gruppo finito di ordine $2n$, con n dispari. In questo esercizio dimostreremo che G ammette un sottogruppo di indice 2.
 - (a) Per ogni $g \in G$, sia $t_g : G \rightarrow G$ la *traslazione* per g , ossia $t_g(x) = gx$, per $x \in G$. Dimostrare che t_g è una permutazione di G .
 - (b) Sia S_G il gruppo delle permutazioni degli elementi di G . Dimostrare che l'applicazione $G \rightarrow S_G$, data da $g \mapsto t_g$, è un omomorfismo di gruppi.
 - (c) Dimostrare che G ha un elemento x di ordine 2 e calcolare il segno della permutazione t_x .
 - (d) Dimostrare che $H = \{g \in G : \text{il segno di } t_g \text{ è pari}\}$ è un sottogruppo di indice 2.
7. Sia G un gruppo di cardinalità 56. Dimostrare che G ammette un 2-sottogruppo di Sylow normale oppure un 7-sottogruppo di Sylow normale. (Sugg. Se i 7-sottogruppi di Sylow non sono normali, determinare la cardinalità del complemento dell'unione dei 7-sottogruppi di Sylow).
8. Dimostrare: se un gruppo semplice G ammette un sottogruppo di indice n , allora la cardinalità di G divide $n!$. (Sugg. considerare l'azione di G sull'insieme delle classi laterali sinistre del sottogruppo H .)
9. Dimostrare che nei seguenti casi nessun gruppo di cardinalità n è semplice:
 - (a) $n = 200$; (b) $n = 8p$ con p primo; (c) $n = 36$; (d) $n = 72$.(Sugg: usare l'esercizio precedente)
10. Sia H un sottogruppo di un gruppo finito G .
 - (a) Dimostrare che H è risolubile se G è risolubile.
 - (b) Supponiamo adesso che H è un sottogruppo normale. Dimostrare che G è risolubile se e solo se sia H che G/H sono risolubili.