

1. Sia H il sottogruppo del gruppo simmetrico S_4 generato da $(1\ 2\ 3)$. Determinare gli elementi del normalizzante di H in S_4 .
2. Sia $n \geq 2$ e sia $X = \{1, 2, \dots, n\}$. Il gruppo S_n agisce sull'insieme $X \times X$ via $\sigma(x, y) = (\sigma(x), \sigma(y))$ per $\sigma \in S_n$ e $x, y \in X$. Quanto orbite ci sono?
3. Sia $\mathcal{H} = \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ il semipiano superiore. Definiamo

$$\sigma(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{per } \sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{SL}_2(\mathbf{R}).$$

- (a) Dimostrare che si tratta di un'azione di $\operatorname{SL}_2(\mathbf{R})$ su $\mathcal{H}$.
 - (b) Dimostrare che l'azione è *transitiva*.
 - (c) Determinare lo stabilizzatore di $i \in \mathcal{H}$.
4. Sia G il gruppo moltiplicativo dato da

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : x \in \mathbf{Z}_5 \text{ e } y \in \mathbf{Z}_5^* \right\}.$$
 - (a) Verificare che $\#G = 20$.
 - (b) Esibire un 5-sottogruppo di Sylow. Quanti 5-sottogruppi di Sylow ci sono?
 - (c) Esibire un 2-sottogruppo di Sylow. Quanti 2-sottogruppi di Sylow ci sono?
 5. Sia G il gruppo alternante A_6 .
 - (a) Quanti 5-sottogruppi di Sylow ci sono?
 - (b) Dimostrare che ogni 3-Sottogruppo di Sylow è isomorfo a $\mathbf{Z}_3 \times \mathbf{Z}_3$. Quanti ne sono?
 - (c) Esibire esplicitamente un 2-sottogruppo di Sylow. (ce ne sono 45)
 6. Sia p un primo e sia P un p -sottogruppo di Sylow di un gruppo finito G . Dimostrare che ci sono esattamente $[G : N_G(P)]$ p -sottogruppi di Sylow in G . Qua $N_G(P)$ indica il normalizzante di P in G .
 7. Sia G un gruppo abeliano finito.
 - (a) Sia p un primo. Dimostrare che $H = \{x \in G : \text{l'ordine di } x \text{ è una potenza di } p\}$ e $H' = \{x \in G : \text{l'ordine di } x \text{ non è divisibile per } p\}$ sono sottogruppi di G .
 - (b) Dimostrare che la mappa naturale $H \times H' \rightarrow G$ è un isomorfismo.
 - (c) Dimostrare che $\#H$ è una potenza di p , mentre $\#H'$ non è divisibile per p .
 - (d) Dimostrare che G è prodotto diretto dei suoi p -sottogruppi di Sylow.
 8. Sia p un numero primo. Esibire un p -sottogruppo di Sylow di $\operatorname{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$. Quanti p -sottogruppi di Sylow ci sono?
 9. (terzo teorema di isomorfismo) Sia G un gruppo e siano H e N sottogruppi di G . Supponiamo che N normalizzi H : per ogni $g \in N$ abbiamo che $gHg^{-1} \subset H$.
 - (a) Dimostrare che $HN = \{xg : x \in H \text{ e } g \in N\}$ è un sottogruppo di G .
 - (b) Dimostrare che H è sottogruppo normale di HN .
 - (c) Dimostrare che l'omomorfismo composto $N \hookrightarrow HN \rightarrow HN/H$ è suriettivo e che il suo nucleo è $H \cap N$.
 - (d) Dedurre che la mappa indotta $N/(H \cap N) \rightarrow HN/N$ è un'isomorfismo.