

1. Siano  $p$  e  $q$  due numeri primi. Dimostrare che ogni gruppo  $G$  di ordine  $pq$  ammette un sottogruppo normale diverso da  $G$  e da  $\{1\}$ .
2. Sia  $G = \text{SL}_2(\mathbf{Z}_3)$ . Far vedere che  $G$  ha 24 elementi. Decidere se il 2-sottogruppo di Sylow di  $G$  è isomorfo al gruppo diedrale  $D_4$  oppure al gruppo dei quaternioni  $Q$ .
3. Sia  $G$  un gruppo finito. Dimostrare che per ogni classe di coniugio  $C$  si ha che  $\#C \leq \#[G, G]$ .
4. Sia  $G$  un gruppo. Un sottogruppo  $H$  di  $G$  si dice *caratteristico* se  $\sigma(H) = H$  per ogni  $\sigma \in \text{Aut}(G)$ . Dimostrare che il centro  $Z(G)$  e il sottogruppo dei commutatori  $[G, G]$  sono sottogruppi caratteristici di  $G$ .
5. Siano  $N \subset H \subset G$  sottogruppi.
  - (a) Dimostrare che se  $H$  è normale in  $G$  ed  $N$  è un sottogruppo caratteristico di  $H$ , allora  $N$  è un sottogruppo normale di  $G$ .
  - (b) Esibire un esempio con  $N$  è normale in  $H$  ed  $H$  è normale in  $G$ , ma  $N$  non è normale in  $G$ . (Sugg. considerare  $G = D_4$ )
6. Sia  $G$  un gruppo di cardinalità  $992 = 31 \cdot 32$ . Dimostrare che  $G$  ammette un 2-sottogruppo di Sylow normale oppure un 31-sottogruppo di Sylow normale.
7. Sia  $G$  un gruppo di cardinalità 98. Dimostrare che  $G$  è abeliano se e solo se  $G$  contiene un unico elemento di ordine 2.
8. Sia  $p$  un primo e sia  $G$  un gruppo finito semplice di cardinalità divisibile per  $p^2$ . Allora  $G$  non ammette sottogruppi di indice  $p$ .
9. Sia  $G$  un gruppo finito e siano  $x, y \in G$  due elementi distinti di ordine 2. Dimostrare che il sottogruppo generato da  $x$  e  $y$  è un gruppo diedrale.
10. Per gli anelli finiti  $R = \mathbf{Z}_{91}$ ,  $\mathbf{Z}_{100}$ ,  $\mathbf{Z}[i]/(9 - 2i)$  e  $\mathbf{Z}_3[X]/(X^4 - 1)$ , scrivere il gruppo moltiplicativo  $R^*$  come prodotto di gruppi ciclici.
11. (*Il transfer*) Sia  $G$  un gruppo finito e sia  $H \subset G$  un sottogruppo. Sia  $X \subset G$  un insieme di rappresentanti delle classi laterali sinistre di  $H$ . Si ha quindi che  $\#X = [G : H]$ .
  - (a) Dimostrare che per ogni  $g \in G$  ed ogni  $x \in X$  esistono unici  $y \in X$  e  $h \in H$  tali che  $gx = yh$ . Scriviamo  $h_{g,x}$  per l'elemento  $h \in H$ .
  - (b) Sia  $t : G \rightarrow H/[H, H]$  l'applicazione data da

$$t(g) = \prod_{x \in X} h_{g,x} \text{ modulo } [H, H].$$

Dimostrare che  $t$  è un omomorfismo ben definito che non dipende dalla scelta dell'insieme  $X$ .

- (c) Supponiamo che  $G$  sia ciclico e che  $d = [G : H]$ . Dimostrare che l'omomorfismo  $t$  è dato da  $t(g) = g^d$ , per  $g \in G$ .