

COGNOME

NOME

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali*. Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Il gruppo alternante A_4 agisce su se stesso tramite coniugio. Quante orbite ci sono?
2. Fattorizzare il polinomio $X^3 - 1$ in fattori irriducibili negli anelli $\mathbf{R}[X]$, $\mathbf{Z}_3[X]$ e $\mathbf{Z}_5[X]$.
3. Dimostrare che ogni gruppo di cardinalità 2023 è abeliano. (Sugg: $2023 = 7 \cdot 17^2$.)
4. Scrivere il gruppo $\mathbf{Z}_{2023}^*$ come prodotto di gruppi ciclici tipo $\mathbf{Z}_n$.
5. Decidere quali dei seguenti ideali di $\mathbf{Z}[X]$ sono primi o massimali:
(a) (3) , (b) $(3, X)$, (c) $(3, X^2)$, (d) $(3, X^3)$.
6. Quanti ideali massimali possiede l'anello $\mathbf{R}[X]/(X^4 - 1)$?

Soluzioni.

1. Questo è la parte (c) dell'esercizio 2 del foglio 1.
2. Questo è una versione più facile dell'esercizio 3 del foglio 5.
3. Sia $\#G = 2023$. Per i teoremi di Sylow c'è un unico 7-sottogruppo di Sylow e c'è un unico 17-sottogruppo di Sylow. Il gruppo G è quindi prodotto dei due sottogruppi di Sylow. Poiché per ogni primo p i gruppi di cardinalità p o p^2 sono abeliani, anche G è abeliano.
4. Per il teorema cinese si ha che $\mathbf{Z}_{2023}^* \cong \mathbf{Z}_7^* \times \mathbf{Z}_{17^2}^*$. Il gruppo $\mathbf{Z}_7^*$ è ciclico di ordine 6 e il gruppo $\mathbf{Z}_{17^2}^*$ è ciclico di ordine $16 \cdot 17 = 272$. Si ha quindi che $A \cong \mathbf{Z}_6 \times \mathbf{Z}_{272}$. Una seconda applicazione del teorema cinese fa vedere che $\mathbf{Z}_{2023}^*$ è anche isomorfo a $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_{816}$ (dove $816 = 3 \cdot 16 \cdot 17$.)
5. L'ideale (3) è primo mentre $(3, X)$ è massimale. Gli ideali $(3, X^2)$ e $(3, X^3)$ non sono primi.
6. L'anello $\mathbf{R}[X]$ è un PID. Gli ideali massimali sono gli ideali generati da elementi irriducibili. Gli ideali massimali di $\mathbf{R}[X]/(X^4 - 1)$ sono immagini degli ideali massimali di $\mathbf{R}[X]$ che contengono $X^4 - 1$. I generatori di questi ideali sono i fattori irriducibili di $X^4 - 1$. Poiché $X^4 - 1 = (X - 1)(X + 1)(X^2 + 1)$, ci sono tre fattori irriducibili e quindi anche tre ideali massimali.