

COGNOME

NOME

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Sia G il gruppo $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbf{Z}_5 \text{ e } ac = 1 \right\}$. Dimostrare che G non è isomorfo al gruppo diedrale D_{10} .
2. Per quali numeri naturali n il polinomio $x^{n^4} + x^{n^3} + x^{n^2} + x^n + 1$ di $\mathbf{Q}[X]$ è divisibile per $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$?
3. Sia A_5 il gruppo alternante su 5 lettere. Quanti omomorfismi $\mathbf{Z}_4 \rightarrow A_5$ ci sono?
4. Sia p un primo e sia A l'anello $\mathbf{Z}_p[X, Y]$. Siano dati gli ideali $I = (X, Y)$ e $J = (X, Y^2)$.
 - (a) Quanti elementi ha l'anello A/I^2 ?
 - (b) Quanti elementi ha l'anello A/IJ ?
5.
 - (a) Dimostrare che $X^2 - 2$ è un polinomio irriducibile in $\mathbf{F}_5[X]$.
 - (b) Dimostrare che $k = \mathbf{F}_5(\sqrt{2}) = \mathbf{F}_5[X]/(X^2 - 2)$ è un campo di 25 elementi.
 - (c) Calcolare l'ordine dell'elemento $1 - \sqrt{2}$ del gruppo k^* .
6. Sia A un anello commutativo finito.
 - (a) Dimostrare che per ogni $x \in A^*$ si ha che $\#\{a \in A : xa = a\} = \#(A/(x - 1))$.
 - (b) Dimostrare che il numero di ideali principali di A è uguale a

$$\frac{1}{\#A^*} \sum_{x \in A^*} \#(A/(x - 1)).$$

Soluzioni.

1. Il gruppo G ha elementi di ordine 4. Per esempio $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Ma il gruppo diedrale D_{10} non ha elementi di ordine 4.
2. Questo è l'esercizio 1 del foglio 13.
3. Il gruppo A_5 non ha elementi di ordine 4. Il numero di omomorfismi $\mathbf{Z}_4 \rightarrow A_5$ è quindi uguale a 1 (per l'omomorfismo banale) più il numero di elementi di ordine 2. Poiché ci sono 15 elementi di ordine 2 in A_5 , ci sono 16 omomorfismi.
4. (a) Poiché $I^2 = (X^2, XY, Y^2)$, ogni classe laterale di A/I^2 è rappresentata da un polinomio della forma $aX + bY + c$, con $a, b, c \in \mathbf{Z}_p$. L'anello A/I^2 ha quindi p^3 elementi. (b) Si ha che $IJ = (X^2, XY, Y^3)$. Poiché ogni classe è rappresentata da un polinomio della forma $a + bX + cY + dY^2$, con $a, b, c, d \in \mathbf{Z}_p$, l'anello A/IJ ha p^4 elementi.
5. Questo è l'esercizio 6 del foglio 11.
6. Il gruppo A^* agisce su A tramite moltiplicazione. L'insieme dei punti fissi di $x \in A^*$ è $F_x = \{a \in A : xa = a\}$. L'insieme F_x è il nucleo dell'omomorfismo $f_x : A \rightarrow A$ dato da $a \mapsto (x - 1)a$. La parte (a) segue dal fatto che $\#\ker f_x = \#A/\#\operatorname{im} f_x = \#(A/(x - 1))$. Le orbite dell'azione di A^* corrispondono biettivamente agli ideali principali di A generati da loro elementi. Per (b) basta quindi applicare la formula di Burnside.
Per l'anello $A = \mathbf{Z}_n$ ritroviamo l'identità di Menon del foglio 1.