

COGNOME

NOME

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Sia p un numero primo. Decidere se i p -sottogruppi di Sylow del gruppo simmetrico S_{2p} sono ciclici o meno.
2. Sia k un campo finito di q elementi. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n su k .
 - (a) Dimostrare che la moltiplicazione per gli scalari è un'azione del gruppo k^* su V .
 - (b) Quante orbite ci sono?
3. Dimostrare che è possibile costruire con riga e compasso un angolo di 3 gradi, ma non è possibile costruirne uno di 1 grado.
4. Sia R un anello commutativo con 1. Un elemento $x \in R$ si dice *nilpotente* se $x^n = 0$ per qualche $n \geq 0$.
 - (a) Dimostrare che gli elementi nilpotenti di R formano un ideale N di R .
 - (b) Dimostrare che $N \subset \mathfrak{p}$, per ogni ideale primo $\mathfrak{p}$ di R .
5. Sia A un gruppo additivo (e quindi commutativo) finito. Sia $R = \{f : A \rightarrow A\}$ l'insieme delle mappe di A in se stesso. Per $f, g \in R$ definiamo $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ e $(f \cdot g)(x) = \sum_{y \in A} f(y)g(x-y)$. Con tali operazioni R è un anello con 1.
 - (a) Dimostrare che R è commutativo.
 - (b) Esibire l'elemento "1" di R .
6. Sia G un gruppo e sia $N \subset G$ un sottogruppo normale.
 - (a) Dimostrare che $H = \{\sigma \in \text{Aut}(G) : \sigma(N) = N\}$ è un sottogruppo di $\text{Aut}(G)$.
 - (b) Dimostrare che la mappa $\phi : H \rightarrow \text{Aut}(G/N)$ data da $\phi(\sigma) = \bar{\sigma}$ dove $\bar{\sigma}(gN) = \sigma(g)N$ per ogni $g \in G$, è un omomorfismo ben definito.
 - (c) L'applicazione ϕ è iniettiva? suriettiva? Dimostrare tali affermazioni o esibire controesempi.

Soluzioni.

1. Per $p = 2$ i 2-sottogruppi di Sylow di D_{2p} sono isomorfi al gruppo diedrale D_4 . Se $p > 2$, la potenza esatta di p che divide $\#S_{2p} = (2p)!$ è p^2 . Siano σ e τ i due p -cicli $(1\ 2 \dots p)$ e $(p+1\ p+2 \dots 2p)$. Entrambi hanno ordine p . Poiché sono disgiunti, commutano e generano un p -sottogruppo di Sylow *non ciclico* di S_{2p} .
2. (b) L'origine di V è un'orbita. Due vettori $v, w \in V - \{0\}$ stanno nella stessa orbita se e solo se esiste $\lambda \in k^*$ con $v = \lambda w$. Ne segue che le orbite sono le rette in V passanti per l'origine private dell'origine. Ci sono $(q^n - 1)/(q - 1)$ orbite di questo tipo. In totale ci sono quindi $\frac{q^n - 1}{q - 1} + 1$ orbite.
3. Questo è l'esercizio 5 del foglio 10 e anche l'esercizio 5 del secondo appello.
4. Questo è l'esercizio 7 del foglio 6.
5. (a) Cambiando la variabile y con $x - y$ nella sommatoria $(f \cdot g)(x) = \sum_{y \in A} f(y)g(x - y)$, si vede che $f \cdot g = g \cdot f$. L'"1" è la funzione $e : A \rightarrow A$ data da $e(0) = 1$ e $e(a) = 0$ per $a \neq 0$.
6. (c) In generale ϕ non è né suriettiva né iniettiva. Il gruppo $G = \mathbf{Z}_4 \times \mathbf{Z}_2$ con sottogruppo normale $N = \{(0, 0), (2, 0)\}$ è un controesempio. Infatti, si ha che $G = H$ e $\text{Aut}(G)$ è isomorfo al gruppo diedrale D_4 , mentre $\text{Aut}(G/N)$ è isomorfo al gruppo simmetrico S_3 . Non ci sono omomorfismi iniettivi o suriettivi da D_4 a S_3 .