Algebra 2 (Schoof) 2^o appello 12 febbraio 2024, ore 10:00–12:00

COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Sia $n \geq 2$ e sia $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Il gruppo simmetrico S_n agisce sull'insieme $X \times X$ via $\sigma(x, y) = (\sigma(x), \sigma(y))$ per $\sigma \in S_n$ e $x, y \in X$. Quante orbite ci sono?
2. Sia p un primo e sia $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ il gruppo delle matrici invertibili con coefficienti in $\mathbf{Z}_p$. Sia $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_p$ e sia $H \subset \mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_p$ il sottogruppo generato da $\mathbf{e}_1$. Sia $G = \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p) : A(\mathbf{e}_1) \in H\}$.
   (a) Dimostrare che G è sottogruppo di $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$.
   (b) Quanti elementi ha G?
   (c) Dimostrare che G è un gruppo risolubile.
3. Decidere se esiste o meno un gruppo semplice di cardinalità 360.
4. Decidere se gli anelli $\mathbf{Z}[X]/(X^2)$ e $\mathbf{Z}[X]/(X^2 - 2^2)$ sono isomorfi o meno. Nel caso affermativo, esibire un isomorfismo.
5. Dimostrare che è possibile costruire con riga e compasso un angolo di 3 gradi, ma non è possibile costruirne uno di 1 grado.
6. Sia A l'anello $\mathbf{R}[X, Y]/(X^2 + Y^2 - 1)$.
   (a) Decidere se l'ideale I generato dalla classe laterale di $X - 1$ è primo o meno.
   (b) Esibire un ideale massimale di A che contiene I.

Soluzioni.

1. Questo è l'esercizio 2 del foglio 2.
2. La parte (a) è standard. Il gruppo H consiste nelle matrici della forma $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ con $a, d \in \mathbf{Z}_p^*$ e $b \in \mathbf{Z}_p$. Ci sono $(p-1)^2 p$ matrici di questo tipo. Questo implica (b). Per la parte (c) osserviamo che la mappa $\phi : H \to \mathbf{Z}_p^* \times \mathbf{Z}_p^*$ data da $\phi \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = (a, d)$ è un omomorfismo suriettivo. Il nucleo è $N = \{\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : x \in \mathbf{Z}_p\} \cong \mathbf{Z}_p$. Poichè i gruppi $\mathbf{Z}_p$ e $\mathbf{Z}_p^* \times \mathbf{Z}_p^*$ sono abeliani, il gruppo H è risolubile.
3. Il gruppo A_6 ha 360 elementi ed è semplice.
4. L'anello $\mathbf{Z}[X]/(X^2)$ contiene elementi non nulli α con $\alpha^2 = 0$. Invece $\mathbf{Z}[X]/(X^2 - 2^2)$ no. infatti, ogni elemento $\mathbf{Z}[X]/(X^2 - 2^2)$ è rappresentato da un unico polinomio dalla forma $aX + b$ con $a, b \in \mathbf{Z}$. Se $(aX + b)^2 = 2abX + (4a^2 + b^2) = 0$ in $\mathbf{Z}[X]/(X^2 - 2^2)$, allora per forza $a = b = 0$.
5. Questo è l'esercizio 5 del foglio 10.
6. L'anello quoziente A/I è isomorfo a $\mathbf{R}[X, Y]/(X^2 + Y^2 - 1, X - 1) \cong \mathbf{R}[Y]/(Y^2)$ e non è un dominio. Infatti, l'elemento Y non appartiene all'ideale (Y^2), ma il suo quadrato si. E quindi I non è primo. Un ideale massimale che contiene I è dato da $\mathfrak{m} = (X - 1, Y)$. Infatti, l'anello quoziente $A/\mathfrak{m} \cong \mathbf{R}[X, Y]/(X^2 + Y^2 - 1, X - 1, Y)$ è isomorfo al campo $\mathbf{R}$.