

COGNOME

NOME

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali*. Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Sia G un gruppo finito, sia p un primo e sia $N \subset G$ un sottogruppo normale di cardinalità una potenza di p . Dimostrare che $N \subset P$ per ogni p -sottogruppo di Sylow P di G .
2. Siano $n \geq 1$ e sia $\sigma \in S_n$ una permutazione di ordine dispari. Dimostrare che σ e σ^2 sono coniugati.
3. Il gruppo $\mathbf{Z}_{2024}^*$ è isomorfo ad un prodotto di gruppi ciclici della forma $\mathbf{Z}_m$. Esibire un tale prodotto.
4. Siano A e B anelli commutativi e sia $f: A \rightarrow B$ un omomorfismo di anelli.
 - (a) Dimostrare: se $\mathfrak{p}$ è un ideale primo di B allora $f^{-1}(\mathfrak{p})$ è un ideale primo di A .
 - (b) Se $\mathfrak{m}$ è un ideale massimale di B allora $f^{-1}(\mathfrak{m})$ non è necessariamente un ideale massimale di A . Dare un controesempio.
5. Sia p un primo e sia $I \subset \mathbf{Z}_p[X, Y]$ l'ideale generato da X e Y^2 .
 - (a) Quanti elementi ha l'anello quoziente $A = \mathbf{Z}_p[X, Y]/I^2$?
 - (b) Esibire, se esiste, un divisore dello zero in A .
6. Determinare il grado di un campo di spezzamento del polinomio $X^{17} - 1$ su $\mathbf{F}_2$.

Soluzioni.

1. Questo è l'esercizio 3 del foglio 3.
2. La permutazione σ è un prodotto di cicli disgiunti, ognuno di lunghezza *dispari*. Per m dispari, il quadrato di un m -ciclo è anche un m -ciclo. Ne segue che σ^2 è un prodotto di cicli disgiunti che hanno le stesse lunghezze di quelli di σ . Le permutazioni σ e σ^2 sono quindi coniugate in S_n .
3. Abbiamo che $2024 = 8 \cdot 11 \cdot 23$. Per il teorema cinese, poiché $\mathbf{Z}_p^*$ è ciclico per primi $p > 2$ e poiché $\mathbf{Z}_8^* \cong \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$, abbiamo che $\mathbf{Z}_{2024}^*$ è isomorfo a $\mathbf{Z}_{22} \times \mathbf{Z}_{10} \times \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$.
4. Questo è l'esercizio 6 del foglio 6.
5. L'ideale I^2 è uguale a (Y^4, XY^2, X^2) . Ogni classe laterale ammette quindi un rappresentante della forma $f_3(X)Y^3 + f_2(X)Y^2 + f_1(X)Y + f_0(X)$ dove i polinomi $f_3, f_2 \in \mathbf{F}_p[X]$ sono costanti mentre f_1, f_0 hanno grado ≤ 1 . Infatti, una $\mathbf{F}_p$ -base di A è data dagli elementi Y^3, Y^2, XY, Y, X e 1 . Riducendo modulo X e Y , si dimostra che sono linearmente indipendenti su $\mathbf{F}_p$. La cardinalità di A è quindi p^6 . Un divisore dello zero è per esempio la classe laterale di X .
6. Le radici di $X^{17} - 1$ sono le 17-ime dell'unità. Il più piccolo grado m tale che $\mathbf{F}_{2^m}^*$ contiene un elemento di ordine 17 è l'ordine di $\bar{2} \in \mathbf{Z}_{17}^*$, vale a dire $m = 8$.