1. Sia $H \subset \mathbf{Z}_{31}^*$ il sottogruppo generato da $\overline{2}$.
   (a) Quanti elementi ha H? Quanti elementi ha il gruppo quoziente $\mathbf{Z}_{31}^*/H$?
   (b) Dimostrare che $\mathbf{Z}_{31}^*/H$ è ciclico.
   (c) Determinare l'ordine dell'elemento $\overline{9}H$ di $\mathbf{Z}_{31}^*/H$.

2. Sia $G = \mathbf{Z}_{20}^*$.
   (a) Sia H il sottogruppo generato da $\overline{9}$. Stabilire se il gruppo quoziente G/H è ciclico o meno.
   (b) Sia H il sottogruppo generato da $\overline{19}$. Stabilire se il gruppo quoziente G/H è ciclico o meno.

3. Sia G il gruppo moltiplicativo $\mathbf{C}^*$ e sia $S = \{z \in \mathbf{C}^* : |z| = 1\}$.
   (a) Dimostrare che S è un sottogruppo di $\mathbf{C}^*$.
   (b) Chi sono le classi laterali di S?
   (c) Dimostrare che il gruppo $\mathbf{C}^*/S$ è isomorfo al gruppo additivo $\mathbf{R}$.

4. Dimostrare che il gruppo quoziente $\mathbf{R}^*/\{+1, -1\}$ è isomorfo al gruppo additivo $\mathbf{R}$.

5. Dimostrare che il gruppo quoziente $\mathbf{C}/\mathbf{R}$ è isomorfo a $\mathbf{R}$.

6. Sia $G = \mathbf{Z}_{32}^*$.
   (a) Sia H il sottogruppo generato da $\overline{25}$ e $\overline{31}$. Stabilire se il gruppo quoziente G/H è ciclico o meno.
   (b) Sia H il sottogruppo generato da $\overline{5}$ e $\overline{9}$. Stabilire se il gruppo quoziente G/H è ciclico o meno.

7. Sia G il gruppo $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_8$ e sia H il sottogruppo generato dall'elemento v. Nei seguenti casi determinare l'ordine di v, determinare $\#(G/H)$ e decidere se G/H è ciclico o meno.
   (a) $v = (\overline{0}, \overline{2})$; (b) $v = (\overline{1}, \overline{0})$; (c) $v = (\overline{1}, \overline{2})$.

8. Sia G un gruppo e siano H e H' due sottogruppi con le seguenti proprietà:
   – $hh' = h'h$ per ogni $h \in H$, $h' \in H'$,
   – $H \cap H' = \{e\}$,
   – Per ogni $g \in G$ ci sono $h \in H$ e $h' \in H'$ tali che $g = hh'$.

   Dimostrare che l'applicazione
   $$f : H \times H' \longrightarrow G$$
   data da $f(h, h') = hh'$ è un isomorfismo.

9. Sia S il sottogruppo moltiplicativo $\{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$ di $\mathbf{C}^*$. Dimostrare che
   $$\mathbf{C}^* \cong \mathbf{R}_{>0}^* \times \ S.$$
   (Sugg. utilizzare l'esercizio precedente.)